El desarrollo de las funciones elípticas

Abel

GÉNIOS de las MATEMÁTICAS

El desarrollo de las funciones elípticas

Abel

RBA

© 2016, José María Almira y José Ángel Cid por el texto
© 2017, RBA Coleccionables, S.A.U.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Luz de la Mora
Infografías: Alberto Fregenal
Fotografías: Alamy: 29ad, 113ai; Archivo RBA: 29ai, 40, 60, 72, 75ai, 75ad, 75bi, 75bd, 83, 113bi, 113bd, 117, 131, 135a; Emilio Segrè Visual Archives: 76; Getty Images: 113ad, 143, 146, 147; Søren Fuglede Jørgensen: 137; Lutz Lehmann: 85i, 85d; Bjørn Erik Pedersen: 29b; Shutterstock: 135b.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN (Obra completa): 978-84-473-8775-5
ISBN: 978-84-473-9069-4
Depósito legal: B 19456-2017

Impreso y encuadernado en Cayfosa (Impresia Ibérica)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO 1 El genio que surgió del frío 15

CAPÍTULO 2 En busca de la solución perdida 55

CAPÍTULO 3 Dos hombres y un Grand Prix: Abel, Jacobi y la teoría de las funciones elípticas 89

CAPÍTULO 4 El legado de Abel 127

LECTURAS RECOMENDADAS 151

ÍNDICE 153

Introducción

En Oslo, a finales de mayo, cuando el rigor del invierno ya ha pasado y el sol anima a los noruegos a salir a la calle, un curioso ritual se repite año tras año: en los jardines del Palacio Real, a los pies de una imponente estatua de bronce sobre un enorme pedestal de granito, alguno de los mejores matemáticos del mundo coloca una corona de flores en honor de Niels Henrik Abel, el genio nórdico que murió antes de los veintisiete años y que protagoniza este libro. El homenaje forma parte de los actos del premio Abel, que aspira desde su creación en 2002, bicentenario del nacimiento de Abel, a ser el premio Nobel de las matemáticas. La ceremonia principal, la entrega del premio Abel por parte del rey de Noruega, suele celebrarse al día siguiente y continúa con un banquete de gala y dos lecturas por parte de los ganadores: una ante los miembros de la Academia de Ciencias y Letras de Noruega, que concede el premio, y otra ante estudiantes de secundaria que tienen así la oportunidad de conocer de primera mano los principales avances de las matemáticas actuales. No en vano, uno de los motivos principales por los que el Parlamento noruego aprobó por unanimidad la creación del premio Abel fue para aumentar el prestigio social de las matemáticas y generar interés por las mismas entre las jóvenes generaciones.

Pero, ¿quién fue este genio al que tanto respeto y admiración se profesa en su país natal?, ¿cuáles fueron sus principales contri-

buciones al pensamiento científico?, ¿por qué se atribuye tanta importancia a su obra? A lo largo de las páginas de este libro se intentará responder estas y otras cuestiones con cierto detalle. Ahora, a modo de introducción, se esboza un breve resumen que permitirá contextualizar la vida y la obra del personaje en cuestión.

Niels Henrik Abel nació el 5 de agosto de 1802 en Finnøy —una pequeña isla del suroeste de Noruega—, hijo de Søren Georg Abel, un pastor protestante, y Anne Marie Simonsen. Dos años después del nacimiento de Abel, toda la familia se desplazó a la parroquia de Gjerstad. Fue en esta pequeña villa del sureste de Noruega donde Niels Henrik pasó la infancia con sus cinco hermanos, en una época políticamente convulsa y llena de dificultades económicas. A principios del siglo XIX Noruega formaba parte de Dinamarca, y en 1807 se vio sometida a un duro bloqueo por parte de Reino Unido como represalia dentro del contexto de las guerras napoleónicas. A consecuencia del bloqueo, se paralizaron todas las exportaciones e importaciones —lo que resultó especialmente grave para Noruega porque dependía del grano danés—, y el hambre y la pobreza se extendieron por todo el país. En 1814, tras una guerra entre Dinamarca y Suecia, Noruega pasó a depender de esta última. El padre de Niels Henrik era miembro del Storting, el Parlamento noruego, y participó en la redacción de la nueva Constitución.

Abel estudió en casa hasta 1815, año en el que ingresó, junto con su hermano mayor, en una escuela de Cristianía (la actual Oslo). El potencial de Abel como matemático no se puso de manifiesto hasta que Bernt Michael Holmboe fue contratado como nuevo docente en 1818, en sustitución de un brutal profesor que maltrataba físicamente a los alumnos y que fue despedido cuando uno de ellos falleció. Holmboe supo apreciar el enorme talento de Abel y lo motivó animándolo a leer las obras de los grandes matemáticos: Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange y Pierre-Simon Laplace, entre otros. Además de mentor, fue amigo íntimo y confidente de Abel hasta su trágica muerte. Ni siquiera surgió un reproche por parte de Abel cuando se concedió a Holmboe un puesto en la Universidad de Cristianía, para el que Abel podía considerarse legítimamente mejor cualificado y que además tanta falta le hacía. Holmboe fue un ejemplo maravilloso de maestro que supo reconocer un talento superior en uno de sus alumnos y, en lugar de sentirse intimidado por él, lo orientó y estimuló. Por este motivo, el ministro de Educación noruego entrega anualmente, en vinculación con el premio Abel, el premio en memoria de Bernt Michael Holmboe a la excelencia en la enseñanza matemática. La ceremonia de premiación tiene lugar el mismo día que se realiza la ofrenda ante el monumento a Abel.

En 1820, cuando el padre de Abel murió, después de haber caído en desgracia política, el joven noruego se vio en serios apuros económicos: no disponía de dinero para completar su educación y además debía convertirse en el sostén económico de su familia. Por fortuna, Holmboe acudió en su ayuda y consiguió que varios colegas financiasen los estudios del joven, quien en 1821 ingresó en la Universidad de Cristianía. Pronto empezaron a ver la luz sus primeros artículos y quedó claro que Noruega se le había quedado pequeña y que necesitaba entrar en contacto con los grandes matemáticos continentales para seguir progresando.

Consiguió una pequeña beca de viaje para visitar a Carl Ferdinand Degen y otros matemáticos daneses en Copenhague y que también le permitió conocer a quien pronto se convertiría en su prometida, Christine Kemp, a la que cariñosamente llamaba Crelly. Sin embargo, él tenía un objetivo más ambicioso: viajar a Alemania y Francia para tratar a la élite mundial de las matemáticas. Mientras se preparaba para ello, Abel produjo su primer gran resultado: la imposibilidad de resolver la ecuación general de quinto grado mediante radicales. Él mismo corrió con los gastos de la publicación de este trabajo en un panfleto que vio la luz en 1824, y al año siguiente inició un viaje por el continente que se prolongaría hasta mediados de 1827. En Berlín tuvo lugar para Abel el encuentro más fructífero de todo su viaje. Allí conoció al que sería, junto con Holmboe, su más leal amigo y su más firme apoyo: August Leopold Crelle. Este ingeniero y aficionado a las matemáticas fundó la revista *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, también conocida como *Crelle*, en la que Abel publicaría muchos de sus trabajos y que sirvió para dar difusión a sus resultados entre los matemáticos europeos. Cuando Abel llegó a París, después de dar un rodeo para atravesar los Alpes junto a unos amigos, era el ve-

rano de 1826 y el recibimiento de los matemáticos franceses fue correcto pero distante. Conoció a Augustin-Louis Cauchy y Adrien-Marie Legendre, pero en un primer momento no consiguió que se interesasen por sus descubrimientos. Aun así, trabajó muy duro durante varios meses para completar uno de sus estudios más importantes, la llamada «Memoria de París», que contenía el teorema de adición para integrales abelianas, uno de sus resultados más profundos. La memoria fue presentada por Jean-Baptiste Joseph Fourier ante la Academia de Ciencias. Abel confiaba en que una opinión favorable de la misma le abriría las puertas en el mundo académico. Sin embargo, esperó en vano una respuesta: Cauchy perdió el manuscrito, que no aparecería hasta después de la muerte de Abel. Además, su situación en París se volvió desesperada por la falta de dinero. A finales de 1826 gastó sus últimos recursos para pagar el viaje de vuelta a Berlín. Allí pudo subsistir con la ayuda de Holmboe y Crelle, pero su salud ya estaba deteriorada. Permaneció en dicha ciudad hasta mediados de 1827, trabajando en la teoría de las funciones elípticas, una amplia generalización de las funciones trigonométricas con importantísimas aplicaciones físicas, tales como el cálculo del período del péndulo simple o la rectificación de un arco de elipse.

Al finalizar su beca de viaje regresó a Cristianía, donde sobrevivió gracias a una pequeña ayuda de la universidad y dando clases particulares. Continuó trabajando en su teoría de funciones elípticas en el aislamiento del invierno noruego y no fue hasta principios de 1828 cuando descubrió los avances del matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi en dicha teoría. Empezó entonces una frenética competición entre ambos. Abel dejó de lado todos sus otros trabajos, incluidos sus nuevos resultados en la teoría de ecuaciones, para centrarse en las funciones elípticas, consciente como era de la importancia del tema y temeroso de que Jacobi se le adelantara.

En las Navidades de 1828 decidió viajar a Froland, donde se encontraba Crelly, a pesar de que visitarla suponía viajar varios días bajo un intenso frío. Llegó con fiebre y, después de las celebraciones navideñas, la tuberculosis lo obligó a reposar en cama. El 6 de abril de 1829, Abel murió sin haber cumplido los veintisiete años y solo dos días antes de que Crelle le remitiera una carta para informarle de que por fin le había conseguido un puesto de profesor en Berlín.

Además de sus contribuciones fundamentales a las ya mencionadas teoría de ecuaciones algebraicas y teoría de funciones elípticas, hiperelípticas y abelianas, Abel participó de forma destacada en el establecimiento firme del rigor en el análisis matemático, especialmente en lo referente al estudio de la convergencia de las series de funciones. En particular, se le considera autor de la primera demostración rigurosa y completa del teorema del binomio de Newton, así como de algunas de las críticas al trabajo de Cauchy —a quien sin embargo admiraba— y Euler, que dieron lugar a una nueva corriente de pensamiento en el análisis cuyo testigo recogerían posteriormente muchos otros matemáticos de renombre, como Karl Weierstrass. Otro aspecto en el que destacó fue en el estudio y el uso de diversas ecuaciones funcionales, rama del análisis de la que también se le considera uno de los fundadores.

Los elogios y reconocimientos póstumos al genio noruego se sucedieron. En 1830 la Academia Francesa de Ciencias concedió a Abel y Jacobi su Grand Prix por sus descubrimientos en el campo de las funciones elípticas. Sus obras completas vieron la luz en dos ediciones antes de finalizar el siglo XIX. A principios del siglo XX se levantó la imponente estatua en los jardines del Palacio Real, a cuyos pies se realiza el homenaje anual del premio Abel. Y quizá no menos importante es el sencillo reconocimiento que los matemáticos le rindieron, asociando su nombre con multitud de términos y conceptos fundamentales de la disciplina: grupo abeliano, integrales abelianas, funciones abelianas, variedades abelianas, ecuación funcional de Abel y transformada de Abel, entre otros.

En las páginas que siguen se presentan, utilizando un mínimo de formalismo matemático, algunos de los resultados más significativos demostrados por Abel, así como algunas de las derivaciones y consecuencias de los mismos, que han ayudado a la creación de varias ramas de la matemática en las que el nombre del matemático noruego destaca como uno de sus fundadores. Resulta sorprendente que alguien tan joven como Abel, condicionado por la situación de aislamiento y depresión económica que le tocó vi-

vir, llegara, en solitario, tan lejos. Pero esa es, probablemente, una de las marcas típicas del genio en matemáticas: la precocidad. Después de su muerte, el matemático francés Charles Hermite afirmó: «Abel ha dejado suficiente a los matemáticos para mantenerlos ocupados durante quinientos años». Hasta ahora, esta afirmación se ha mantenido cierta.

1802 El 5 de agosto, Niels Henrik Abel nace en Finnøy.

1815 Abel se desplaza a Cristianía (actual Oslo) para ser escolarizado de forma tardía —hasta entonces había recibido clases de su padre— en la Escuela Catedral.

1818 Bernt Michael Holmboe es contratado como profesor de la Escuela Catedral y se convierte en maestro de Abel.

1820 Muere el padre de Abel.

1821 Demostración (fallida) de la solubilidad de la quíntica. Se gradúa en la Escuela Catedral y se matricula como alumno de la Universidad de Cristianía, tras aprobar el examen de ingreso. Augustin-Louis Cauchy publica su *Curso de análisis*, que tanto influiría en Abel.

1823 Abel visita a Degen en Copenhague. Conoce a su futura novia, Christine, *Crelly*, Kemp (1804-1862). Primeros artículos de Abel, publicados en Cristianía.

1825 El 7 de septiembre Abel inicia su viaje por Europa con una primera parada en Berlín, donde conoce a August Leopold Crelle y empieza su colaboración con él.

1826 Aparecen publicados varios artículos de Abel en el primer número de *Crelle*, entre ellos uno que contiene la demostración de la imposibilidad de resolver ecuaciones algebraicas a partir del grado cinco. El 10 de julio, Abel llega a París. Redacta su «Memoria de París». Jean-Baptiste Joseph Fourier lee el prefacio de esta ante la Academia de Ciencias y el manuscrito queda sometido a publicación. Abel deja París en diciembre y vuelve a Berlín.

1827 Vuelta a Cristianía, en mayo, finalizado su viaje por Europa. Aparecen publicados los primeros artículos de Abel y Carl Gustav Jacob Jacobi sobre funciones elípticas.

1828 Abel descubre los trabajos de Jacobi. Inicio de la competición entre ambos.

1829 Aparecen publicados varios artículos de Abel. Uno de ellos es sobre ciertas ecuaciones que pueden ser resueltas en radicales (las ecuaciones abelianas), otros son sobre funciones elípticas. Publicación de los «Nuevos fundamentos para una teoría de funciones elípticas» de Jacobi. El 6 de abril Abel muere de tuberculosis en Froland, tras pasar varios meses enfermo. Dos días después, Crelle le escribe desde Alemania confirmándole su nombramiento como profesor.

1830 Abel y Jacobi ganan *ex aequo* el gran premio de matemáticas de la Academia de Ciencias de París.

CAPÍTULO 1

El genio que surgió del frío

Nacer en Noruega en 1802 era, en gran medida, una condena al aislamiento. Las matemáticas de la época se hacían en París, aunque quizá también en Alemania. Nunca tan al norte. Si además uno carecía de recursos económicos, la condena era aún mayor. Tales fueron las circunstancias del nacimiento de Abel, quien, pese a todo, logró que su nombre llegara a figurar entre los más importantes para las matemáticas del siglo XIX.

Søren Georg Abel (1772-1820) era un pastor protestante, luterano, hijo de otro pastor, también luterano. Se había educado en Copenhague, pero en 1800 se le requirió para trabajar en Finnøy, una pequeña isla en el suroeste de Noruega, a donde se desplazó. Ese mismo año conoció a quien más tarde sería su esposa, Anne Marie Simonsen (1780-1846), hija de un marino mercante. Pronto tuvieron descendencia. De hecho, el protagonista de este relato, Niels Henrik Abel, nacido el 5 de agosto de 1802 en Finnøy, fue su segundo hijo. En total, Henrik tuvo cinco hermanos: cuatro chicos y una chica, a la que siempre se sentiría muy unido. Cuando Henrik tenía solo dos años, el puesto de su abuelo como pastor en la parroquia de Gjerstad quedó vacante y fue ocupado por su padre, de manera que el futuro matemático pasó su infancia allí, en una pequeña villa en el sureste de Noruega que actualmente cuenta con menos de tres mil habitantes.

Los primeros años de su educación corrieron a cargo del padre, quien dio especial importancia a la lectura, la escritura, la aritmética básica y, cómo no, el catecismo. Abel contaba ya con trece años cuando, en 1815, ingresó junto con su hermano mayor en una escuela de Cristianía (hoy Oslo). Allí se impartían clases de lenguas clásicas y modernas, así como aritmética y geometría. Durante los primeros cursos, Abel no mostró especial interés por las matemáticas, pero esto cambió cuando, en 1818, un nuevo pro-

fesor entró en sustitución del anterior —quien acostumbraba al maltrato físico de los niños, lo cual no pudo ocultarse tras el fallecimiento de uno de sus alumnos, motivo por el que fue despedido—. La persona que lo relevó, Bernt Michael Holmboe (1795-1850), fue sin duda el motor que despertó la vocación del joven noruego como matemático. No solo supo apreciar enseguida el talento de Abel para las matemáticas sino que rápidamente intentó cultivarlo y lo alimentó con las mejores lecturas que tenía a mano. En efecto, ya durante los primeros meses de escuela, en 1818, Holmboe animó a Abel para que leyera de primera mano a los matemáticos más importantes del momento. En uno de los cuadernos de Abel se puede leer la siguiente anotación:

> Si uno desea averiguar qué debería hacer para obtener un resultado con la mayor conformidad con la naturaleza, debería consultar los trabajos del famoso Laplace, donde esta teoría se muestra con máxima claridad y en una extensión que es acorde con la importancia de la materia. Es fácil ver que una teoría escrita por Laplace debe ser superior a cualquier otra escrita por matemáticos menos brillantes. Me parece que si uno desea progresar en matemáticas, debe estudiar a los maestros, no a los discípulos.

Sin duda alguna, la lista de «maestros» a la que hacía referencia era la sugerida por Holmboe, quien también se dedicaba a su estudio, tras haber asistido a las clases de matemáticas de Søren Rasmussen (1768-1850) en la Universidad de Oslo. En ella se incluían los nombres del suizo Leonhard Euler (1707-1783), el italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813), los franceses Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) y Siméon-Denis Poisson (1781-1840) y el alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), a los que, al parecer, Abel sumaría pronto a los franceses Pierre-Simon Laplace (1749-1827) y Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) como referencias fundamentales.

Abel ingresó en la Universidad de Oslo en 1821. Por entonces, la institución estaba aún en sus primeros años (fue fundada en 1811, aunque abrió sus clases en 1813). Solo se ofertaban títulos en Medicina, Teología, Derecho y Filosofía. Las matemáticas se

estudiaban dentro de la Facultad de Filosofía, y no era posible obtener un título en ciencias, materia que era enseñada solo por dos profesores: Rasmussen y Christopher Hansteen (1784-1873). Aun así, Abel tenía decidido formarse como matemático, por lo que asistió a las clases de ambos. De ellos aprendió lo más básico: una introducción general a las matemáticas y algo sobre geometría esférica y su uso en astronomía. Sin embargo, pronto se vio inmerso en la lectura directa de los grandes nombres de la matemática del momento. En particular, en 1823 estudió en detalle las *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss, lo cual le proporcionó de manera inmediata una batería de problemas de investigación a los que podía dedicarse. Bajo su influencia investigaría no solo cuestiones de teoría de números sino también sobre la teoría de las ecuaciones y el problema de la rectificación de la lemniscata, que le llevaría posteriormente al estudio de las funciones elípticas.

En 1823, Hansteen, con la colaboración de otros dos profesores de la universidad, promovió la publicación de una revista científica, bautizada con el nombre de *Magazin for Naturvidenskaberne*, con el objetivo de dar a conocer e impulsar las investigaciones que se realizaban en Noruega. Allí publicaría Abel sus primeros trabajos. De hecho, en el primer volumen de la revista aparecieron dos contribuciones suyas. En la primera se solucionaban dos problemas de cálculo integral surgidos de su lectura de los *Fundamentos de cálculo diferencial* de Euler y los *Ejercicios de cálculo integral* del francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833). En dicho trabajo se resolvía una cuestión de la mecánica racional que generalizaba el problema de la tautócrona y conducía al estudio de una ecuación, ahora llamada «ecuación integral de Abel», que es de hecho la primera de este tipo que se conoce. La teoría de ecuaciones integrales sería ampliamente desarrollada setenta años después por el sueco Erik Ivar Fredholm (1866-1927), el alemán David Hilbert (1862-1943) y el italiano Vito Volterra (1860-1940), entre otros.

El segundo artículo estaba dedicado a la teoría de la eliminación, un tema propio de la teoría de ecuaciones algebraicas. Su inclusión en la revista forzó a Hansteen a introducir una breve explicación, argumentando que toda revista dedicada a las ciencias naturales debía añadir entre sus intereses la publicación de

EL PROBLEMA MECÁNICO DE ABEL

Considérese una curva $y=y(x)$ suave, que vive en un plano vertical y sobre la cual reposa una partícula material que se desliza sin fricción por el solo efecto de la gravedad. La partícula está situada en un punto (x, y) y cae hasta el origen de coordenadas, que es otro punto de la curva en cuestión. En esta situación se pueden considerar dos preguntas importantes. Por un lado, si se conoce la forma $y=y(x)$ de la curva, ¿es posible calcular el tiempo $T(y)$ que la partícula tarda en llegar al origen? Por otro, si se sabe el tiempo total de descenso $T(y)$, ¿es factible recuperar la forma de la curva? Si se aplica el principio de conservación de la energía mecánica, se verá que ambos problemas están gobernados por la misma ecuación,

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{s'(v)\,dv}{\sqrt{y-v}},$$

$$\text{donde } s(v) = \int_0^v \sqrt{1+x'(t)^2}\,dt$$

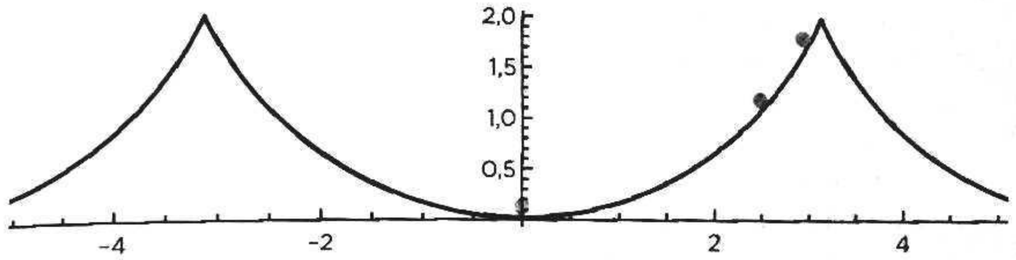
representa la longitud de la curva, desde el punto de altura cero al punto de altura v, medida desde el origen de coordenadas, y g representa la atracción gravitatoria. En el primero de los problemas propuestos, el tiempo se calcula directamente a partir de la forma de la curva, lo que garantiza conocer su longitud $s(y)$. Sin embargo, la cosa se pone interesante al intentar resolver el segundo problema. En este caso, la función $T(y)$ es un dato, y el objetivo es calcular la función $f(v)=s'(v)$, lo que convierte el problema en la búsqueda de una solución para la llamada ecuación integral de Abel,

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{f(v)\,dv}{\sqrt{y-v}},$$

la cual se puede resolver (como hizo el joven noruego) utilizando una herramienta matemática conocida como «la transformada de Laplace».

El problema de la curva tautócrona

Si se aplican los cálculos al caso en el que se impone que $T(y)=T_0$ para cierta constante $T_0>0$ (de modo que la partícula tardará siempre el mismo tiempo en llegar al origen, se deje caer desde la altura que sea), entonces se resolverá el famoso problema de la curva tautócrona (o isócrona), que había sido estudiado por el neerlandés Christiaan Huygens (1629-1695) en el siglo XVII. Abel hizo los correspondientes cálculos, y demostró con un método novedoso que la curva tautócrona no es otra que la cicloide.



Partícula material deslizándose por una cicloide. Se puede probar que, de manera independiente del punto de partida que se tome, esta emplea el mismo tiempo en llegar al origen de coordenadas.

Dos conceptos muy importantes relacionados con estos cálculos, que más adelante han sido ampliamente explotados, son la transformada integral de Abel (que se aplica, por ejemplo, en estudios de radiología) y el cálculo diferencial fraccionario.

artículos de matemáticas, aunque no estuviesen dedicados a temas aplicados. Abel, con solo veintiún años y aún en proceso de formación, debió de sentirse feliz al ver su obra impresa.

Al año siguiente publicó otro artículo, esta vez dedicado a un tema de física aplicada: el análisis de la influencia de la Luna sobre el movimiento de un péndulo. Este trabajo resultó de interés para Hansteen, que estaba involucrado en el estudio del campo magnético terrestre, hasta el punto de que decidió remitir una copia al astrónomo alemán Heinrich Christian Schumacher (1780-1850), editor de una importante revista de astronomía, para que considerase su republicación. Sin embargo, Schumacher encontró, en su revisión del manuscrito, un error de cálculo, y lo rechazó. Es más, fue necesario añadir una corrección del trabajo en un volumen posterior de la revista de Hansteen.

De hecho, esta fue la segunda vez en la que Abel tuvo que admitir un error en uno de sus estudios. La primera fue en 1821, antes de ingresar en la universidad. Abel se había enfrentado nada menos que a uno de los problemas abiertos más importantes del momento: la solución en radicales de las ecuaciones de grado cinco. Creyó encontrar una demostración de que estas se podían resolver y se la pasó a Holmboe, quien a su vez se la enseñó a Hansteen. Ninguno de ellos supo encontrar el error, pero tampoco estaban conven-

cidos completamente del resultado y, conscientes de su importancia, decidieron enviarlo a quien por aquella época se consideraba uno de los mejores matemáticos del momento en el norte de Europa: Ferdinand Degen (1766-1825). Quizás él podría confirmar el resultado y sugerir su publicación en las *Transactions* de la Real Academia Danesa de Ciencias. Pero Degen —que tampoco encontró error alguno— solicitó del autor, a modo de test, el desarrollo explícito de varias soluciones numéricas concretas. Fue entonces cuando Abel descubrió, en su intento de producir dichos ejemplos, que había una errata en su argumento y, quizá por primera vez, comenzó a pensar que el problema podría ser irresoluble. El artículo, por supuesto, no fue publicado en ninguna revista. Pero es muy probable que esta aventura, que le había llevado tan lejos en el estudio de un problema de importancia como era el de la quíntica, fuera una de las razones fundamentales por las que Abel recibió, a partir de entonces, todo el apoyo posible de Holmboe y los profesores de la Universidad de Oslo. De hecho, Abel es prueba evidente de que el carácter frío que se suele adjudicar a los habitantes del norte de Europa es solo un tópico, un mito. Tal fue el cariño y el entusiasmo que despertó en Holmboe y algunos profesores de la Universidad de Oslo —incluyendo a los matemáticos Hansteen y Rasmussen, pero también al mismísimo rector, el filósofo Niels Treschow (1751-1833)— que cuando, tras aprobar su examen de ingreso, solicitó una de las pocas plazas libres de las que la universidad disponía para alojar a estudiantes sin recursos en su colegio mayor, no solo se le asignó una cama, sino que, con la aportación económica personal de estos profesores, se le concedió un pequeño estipendio con el que podría subsistir. Es más, los propios profesores financiaron posteriormente un viaje a Dinamarca para que Abel conociera a Degen y, al poco tiempo, lograron del gobierno noruego una beca de estudios con el fin de que visitara los distintos «puntos calientes» de la matemática europea del momento, incluyendo París, Berlín, Gotinga y, aunque solo fuera por cercanía física y cultural, Copenhague.

Al margen de su asistencia a las clases, Abel dedicó su primer año en la universidad a dos tareas fundamentales: preparar su examen para obtener el título de *Candidatus Philosophiae* y estudiar

todos los textos de matemática avanzada conservados en la biblioteca. Hizo lo primero con éxito moderado, pues las notas obtenidas en los exámenes fueron las justas para pasar el trance, excepto en física teórica y matemáticas, donde en ambos casos obtuvo la máxima calificación (además, en matemáticas lo logró con honores). Con respecto a lo segundo, parece que devoró todos los textos disponibles, y pronto llegó al punto en el que su pasión por el estudio fue sustituida por un enorme ímpetu investigador. Ahora estaba preparado para iniciar un largo período productivo, que lo llevaría a superar en poco tiempo a sus maestros, al hacer algunas contribuciones que aún hoy se consideran cruciales.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS

A lo largo de esta obra resultará fundamental, en numerosas ocasiones, conocer lo esencial sobre números complejos. Es por ello por lo que se procede a introducirlos ya, desde el primer momento, antes de comenzar a explicar las contribuciones de Abel a las distintas partes de la matemática. Un número complejo es una expresión del tipo $z = a + ib$, donde a y b representan números reales (es decir, puntos de la recta real) y la letra i, llamada «unidad imaginaria», es un nuevo tipo de número que, por imposición, satisface la identidad $i^2 = -1$. Evidentemente, i no es un número como los anteriores, porque se sabe que para los puntos de la recta real un cuadrado da siempre una cantidad positiva. Entonces, ¿qué es?, ¿cómo se puede dotar i de «realidad»?, ¿se puede construir de algún modo a partir de los números que ya conocemos y aceptamos como «objetos reales»? Para lograrlo, se empleará un truco que en matemáticas a menudo es utilizado con éxito. La idea es muy simple: en primer lugar se asume como cierto un resultado o concepto nuevo, luego se derivan algunas consecuencias de esta hipótesis y, entre ellas, se busca alguna pista que permita introducir el resultado o concepto desde una perspectiva diferente, más formal.

Así, en el caso de los número complejos, inicialmente se supone que de verdad existe un «número», al que se denota por i,

que satisface la igualdad $i^2=-1$. A continuación, se asume que dos números complejos $z=a+ib$ y $w=c+id$ son iguales si y solo si $a=c$ y $b=d$. Esto permite, entre otras cosas, representar dichos números como puntos del plano, al identificar el complejo $z=a+ib$ con el punto del plano de coordenadas (a, b). Finalmente, si se consideran ambas hipótesis, se opera con estos números aplicando las reglas habituales que satisfacen la suma y el producto, lo que lleva a la fórmula

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

para la suma de números complejos y a la fórmula

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= a(c+id)+ib(c+id)\\ &= ac+iad+ibc+i^2bd\\ &= (ac-bd)+i(ad+bc)\end{aligned}$$

para el producto. Llegados a este punto, es posible realizar el camino inverso: se parte del plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, que es un objeto matemático conocido, y se definen en él una suma y un producto mediante las ecuaciones

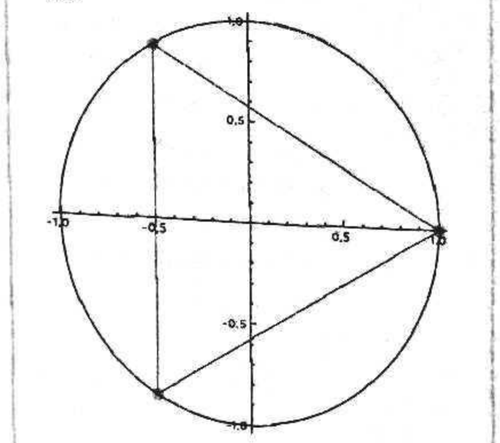
$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d)&=(a+c,b+d),\\ (a,b)\cdot(c,d)&=(ac-bd,ad+bc).\end{aligned}$$

Con dichas operaciones se comprueba que, al identificar los puntos de la recta real con el subconjunto del plano dado por $\mathbb{R}\times\{0\}$ y definir la unidad imaginaria como $i=(0,1)$ se tiene que $i^2=-1$ y se satisfacen las expresiones para la suma y el producto de números complejos introducidas con anterioridad. Estos números dejan, por tanto, de ser producto de la imaginación para convertirse en algo muy concreto: los puntos del plano. Se llama «plano complejo» al conjunto $\mathbb{C}=\{a+ib : a,b\in\mathbb{R}\}$, el cual, como se acaba de observar, se puede identificar de modo evidente con el plano real $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

El plano complejo, con la suma y el producto introducidos, tiene estructura de cuerpo, pero, además, permite resolver ecuaciones algebraicas que antes eran imposibles de abordar. Sobre

esta cuestión se hablará largamente más adelante. Para este capítulo es necesario introducir los conceptos de módulo y argumento de un número complejo. El módulo de $z=a+ib$ no es más que la distancia del punto (a, b) al origen de coordenadas, y se denota por $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Un hecho interesante es que $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, donde $\bar{z}=a-ib$ es el conjugado de $z=a+ib$. El argumento es el ángulo que forma con el eje de abscisas el vector que une el origen de coordenadas al punto (a, b). Un último resultado que se usará con frecuencia es la fórmula de Euler: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta$. A partir de esta fórmula es fácil deducir que el producto de dos números complejos resulta de multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos. Y precisamente esto conduce a demostrar que un número complejo tiene n raíces n-ésimas. Por ejemplo, las raíces n-ésimas de 1 son los vértices del n-gono regular inscrito en la circunferencia unidad, uno de cuyos vértices es justo 1 (véase la figura 1).

FIG. 1



Las raíces cúbicas de 1 son los números $1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, por lo que $1^{1/3}$ toma estos tres valores. Representadas como puntos del plano, coinciden con los vértices de un triángulo equilátero. En general, las raíces n-ésimas de 1 son los vértices del único n-gono regular inscrito en la circunferencia unidad que contiene el 1 como uno de sus vértices.

LAS SERIES DIVERGENTES

Que las matemáticas son un modelo de rigor, exactitud y precisión al que toda ciencia busca acercarse es un tópico que, como todos, contiene solo parte de verdad. En las matemáticas, como en el resto de ciencias, se producen crisis y, aunque se supone está en su propia naturaleza establecer, antes que nada, unos principios firmes sobre los que luego se construirá toda la teoría, lo cierto es que con frecuencia estos se formulan inicialmente de forma imprecisa, y, además, pasado cierto tiempo empiezan a mostrar señales de flaqueza. El modelo propuesto por el matemático griego Euclides (ca. 325 a.C-ca. 265 a.C.) para el desarrollo de la geometría tuvo que ser sometido a examen por largo tiempo, básicamente como consecuen-

cia del estudio del axioma de las paralelas, y finalmente fue aceptado a principios del siglo XX y gracias al trabajo de Hilbert, quien en 1899 publicó un libro dedicado a los fundamentos de la geometría (desde el punto de vista axiomático), que le consolidó como el matemático alemán más influyente del momento, y en el que, por fin, se establecieron unos principios sólidos para la geometría euclídea. Además, el estudio de estas cuestiones fue fructífero, pues proporcionó a las matemáticas material para la creación de varias nuevas geometrías, por no hablar de la influencia que tuvo en aspectos relacionados con los fundamentos y la filosofía de la ciencia.

Toda teoría, sea matemática, física o de cualquier otro tipo, debe fundarse sobre unos pocos principios que inicialmente se usan para elaborar nuevos resultados. Estos mostrarán si las bases establecidas al comienzo son o no las apropiadas para generar una teoría interesante y útil. Si lo son, porque las consecuencias derivadas aportan un conocimiento nuevo, que atrapa, entonces permanecerán en su estado inicial, probablemente ingenuo, durante un cierto período. Pero la historia confirma que con el paso del tiempo llegan nuevas mentes que, a la luz de sus propias experiencias vitales y de su estudio de la teoría que hasta el momento se consideraba bien establecida, se convencen de que es necesaria una revisión de los principios. Esto pasó con la geometría, pero también con el cálculo, en concreto a finales del siglo XVIII y en el primer tercio del siglo XIX. Abel fue uno de los protagonistas de esta revisión, al ocuparse del estudio riguroso de las series de funciones a mediados de la década de 1820.

Cuando nació el cálculo, lo que de veras lo distinguió del álgebra fue su uso del infinito, en diferentes formatos. Si se medita un poco, resulta claro que en toda definición de límite se tiene que hacer frente —se quiera o no— al infinito, pues aquella involucra el establecimiento de ciertas desigualdades que deben ser satisfechas en infinitos casos. Los conceptos de continuidad y diferenciabilidad de funciones reposan sobre la idea de límite. Lo mismo sucede con conceptos geométricos como la rectificación y la cuadratura de las curvas (es decir, el cálculo de sus longitudes así como del área encerrada por ellas), los cuales, evidentemente, constituyeron desde el principio uno de los temas fundamentales

SERIES

La palabra «serie» se usa en matemáticas como abreviación de «suma infinita». Si se tiene una sucesión de valores $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$, es posible plantear el cálculo de su suma: $S = a_0 + a_1 + \ldots a_n + \ldots$, la cual se representa de manera abreviada como $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ y recibe el nombre de «serie de término general a_n».

La paradoja de Zenón de Elea

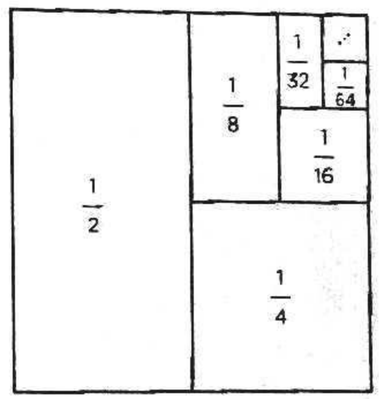
Este tipo de sumas aparece de forma natural en las matemáticas. Por ejemplo, en la famosa paradoja de Zenón de Elea (490 a.C.-430 a.C.) sobre la imposibilidad del movimiento. Esta afirma que todo movimiento es inviable porque, si uno desea moverse del punto A al punto B, entonces nunca llegará, ya que primero se tiene que recorrer la mitad de la distancia d que los separa, a continuación, la mitad de la distancia que queda por andar, y así sucesivamente, lo cual implica una cantidad infinita de pasos que harán imposible llegar al destino. Si se piensa un poco, se verá que la paradoja se resuelve de forma nítida porque las diferentes distancias que se suman decrecen a gran velocidad, lo que hace que la serie asociada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{2^k} = \frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \cdots + \frac{d}{2^n} + \cdots,$$

aunque involucra una suma de infinitos términos, produzca un valor finito, que es justo la distancia entre ambos puntos. Con respecto al tiempo necesario para realizar el desplazamiento, hay que tener en cuenta que distancias más cortas abarcan tiempos menores. Se sigue que la suma de los tiempos empleados también será finita (y su serie asociada es del mismo tipo que la vinculada a las distancias). Una sencilla demostración visual de que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

se observa en el dibujo de la derecha.



Evidentemente, el ejemplo mostrado es muy sencillo. El estudio de las series numéricas es, en realidad, bastante delicado. Las cosas se complican, además, cuando en vez de sumar números, los términos introducidos son funciones. En tal caso, merecen especial mención, por su importancia histórica y sus numerosas aplicaciones, las series de potencias, que son series funcionales de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

y las series trigonométricas, (que se corresponden con sumas del tipo $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$.

que la nueva disciplina podía abordar. Las derivadas involucraban el cálculo de límites de sucesiones de números y, luego, de límites de funciones. Por otro lado, las integrales requerían el cálculo de sumas infinitas, a las que se llamó «series» y, por supuesto, pronto se hizo necesario especificar en qué sentido eran convergentes estas sumas.

A principios de la década de 1820 Cauchy publicó dos monografías cuya influencia en el desarrollo posterior del cálculo, desde el punto de vista de sus fundamentos, fue de extrema importancia. Se trata del *Curso de análisis* de 1821 y el *Resumen de las lecciones de cálculo infinitesimal*, de 1823. En ellos, el matemático francés se planteaba una nueva reconstrucción del cálculo basada en el concepto de límite, el cual se formulaba (en el texto de 1823) con exquisito rigor a través de lo que hoy en día se conoce como notación «$\varepsilon-\delta$» y que continúa siendo la forma estándar de definir los límites. Este método, acompañado de una introducción ordenada de los distintos conceptos y resultados, permitía inyectar rigor y claridad al análisis, al grado de demostrar por vez primera algunas propiedades para las funciones continuas que en realidad solo se habían establecido de manera precisa para clases de funciones mucho más restringidas, como los polinomios. Además, cosa no menos importante, en ellos se establecía una nueva forma de explicar el análisis que facilitaría en gran medida su comprensión a futuros estudiantes.

Ya en 1822, cuando Abel por fin pudo dedicarse seriamente a la investigación en matemáticas, tanto él como los matemáticos de su entorno comprendieron que necesitaba salir de Noruega. Esto era importante porque le permitiría conocer a los grandes matemáticos del momento, para formarse y quedar en posición de aportar su talento, del que nadie dudaba. Se le postuló entonces para una beca de estudios, pero la comisión encargada de tomar la última decisión se mostró inflexible en el momento final, y alegó que, si de verdad se esperaba que el joven sacara provecho de su viaje por Europa, era fundamental que antes aprendiera lenguas modernas (presumiblemente, francés y alemán), con el objetivo de establecer una comunicación fluida con las personas a las que visitaría. Esto requeriría al menos dos años de estudio, en los que debía permanecer en Oslo y

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA. **Bernt Michael Holmboe (1795-1850), maestro y gran amigo de Abel. Supo apreciar e impulsar su talento matemático.**

FOTO SUPERIOR DERECHA. **August Leopold Crelle (1780-1855), fundador del *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, conocido como *Revista de Crelle*, o simplemente *Crelle*, que difundió la obra de Abel. Fue su mejor contacto en Alemania.**

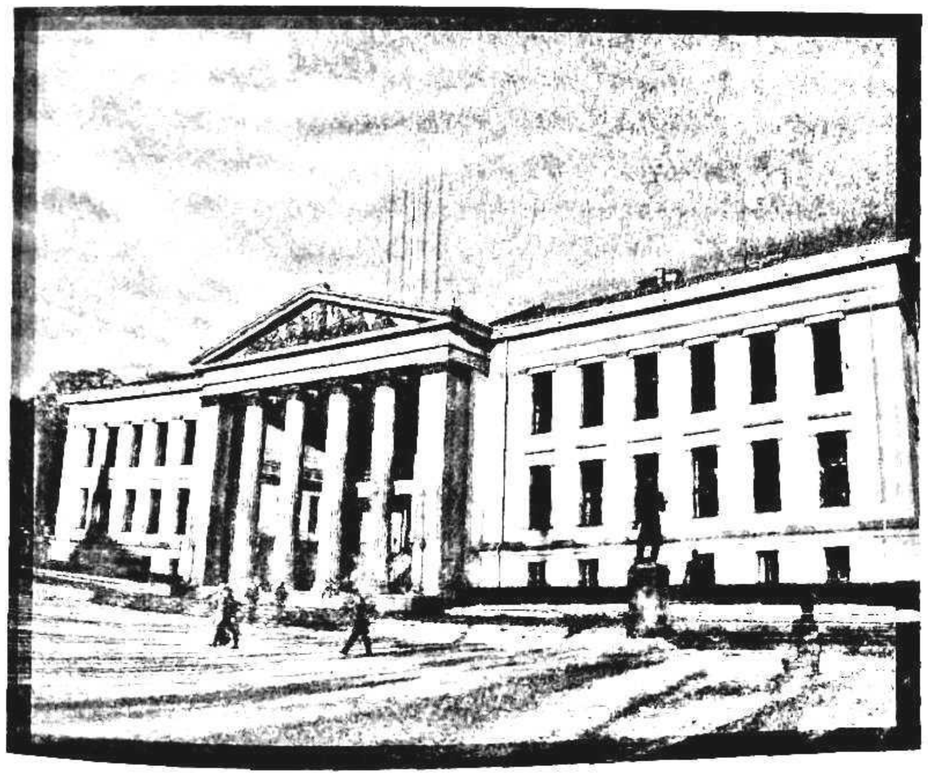


IMAGEN INFERIOR: **El antiguo edificio de la Universidad de Oslo, que, en la actualidad, aloja la Facultad de Derecho.**

para los que, en cualquier caso, se le concedió un pequeño estipendio. Aun así, Abel logró al menos pasar el verano de 1823 en Copenhague, donde tuvo trato personal con Degen. A su vuelta, solicitó de nuevo una beca para viajar a Europa y, esta vez, sí la obtuvo.

Su destino inicial fue Berlín, adonde llegó en octubre de 1825. Una de las primeras cosas que hizo fue visitar a August Leopold Crelle (1780-1855), quien ya entonces era uno de los personajes más influyentes en el panorama matemático alemán. Aunque estaba dedicado en gran medida a proyectos de ingeniería, como la construcción de carreteras y líneas de ferrocarril (fue responsable de la construcción de la línea que une Berlín y Potsdam), supo usar su capacidad para influir en las autoridades políticas de Prusia con el fin de beneficiar el avance de las matemáticas en Alemania. Cuando Abel lo visitó en su despacho en el Instituto de Industria, estaba ocupado con unos documentos y, sin levantar la vista de ellos, pensando que el joven noruego era un estudiante que solicitaba ser examinado para ingresar en el instituto, comenzó sus preguntas. Abel, que apenas sabía alemán, logró articular las palabras: «¡Nada de exámenes! ¡Solo matemáticas!». Entonces Crelle levantó la cabeza y comenzó con su interlocutor una discusión mucho más relajada, parte en francés parte en alemán, sobre matemáticas. Abel había leído algunos trabajos de Crelle, y este comprendió en poco tiempo que tenía ante sí un diamante en bruto. Durante esta conversación, el joven noruego se mostró asombrado de que en Alemania no existiera una revista de investigación dedicada en exclusiva a las matemáticas, lo cual era justo uno de los deseos íntimos de Crelle, quien tenía previsto satisfacerlo en breve. En efecto, en 1826 Crelle fundaría *el Journal für die reine und angewandte Mathematik* (conocido más adelante como *Revista de Crelle* o, simplemente, *Crelle*), que fue la primera publicación periódica de investigación matemática en Alemania no controlada por ninguna academia. Abel publicó numerosos trabajos en ella y, de hecho, se considera que gracias a ellos fue reconocido en el panorama matemático internacional. No resulta extraño que Crelle y él se hicieran amigos con rapidez y que ambos sintieran admiración mutua.

Crelle no se limitó a fomentar la difusión de los trabajos de Abel en su revista. De hecho, los primeros artículos que el joven matemático publicó fueron escritos en francés por él y traducidos por Crelle al alemán, el idioma en el que este deseaba que se publicase la revista. A pesar de que Abel había estudiado alemán durante varios años en su época de escolarización preuniversitaria, se sentía muy incómodo con el idioma y, de todos sus artículos publicados en alemán, solo escribió uno directamente en esa lengua. Sin embargo, en vista de la escasez de trabajos enviados a *Crelle*, al poco tiempo su fundador decidió abrirla a otras lenguas, momento que Abel aprovechó para presentar y publicar sus estudios en francés.

«Con la excepción de las series geométricas, no existe en todas las matemáticas una sola serie infinita cuya suma haya sido determinada rigurosamente.»

— Niels Henrik Abel.

Las matemáticas en Berlín se desarrollaban, en aquella época, bien en torno a la academia, bien en torno a la universidad o, finalmente, en el entorno de Crelle. Y era este último escenario el que en realidad contaba con posibilidades de generar nuevas ideas. Abel hizo una excelente elección al acudir al matemático y tuvo la suerte de congeniar con él. De hecho, entre ambos se produjo una provechosa simbiosis. Crelle, que había traducido numerosos textos importantes de matemáticas (del francés al alemán) y disponía de una magnífica biblioteca, puso de inmediato todos estos libros a disposición de Abel, lo cual facilitó que su talento matemático eclosionara. Por otro lado, las contribuciones de Abel a la *Revista de Crelle* y su participación en los debates matemáticos que el alemán dirigía de manera periódica en su casa, suponían una aportación muy valiosa para Crelle.

En la biblioteca de Crelle, Abel leyó las obras de Cauchy de 1821 y 1823 y, de inmediato, se sumó a sus ideas. Para él, resultaba del todo incomprensible que se hubieran logrado tantos avances en el análisis a pesar de los numerosos errores «de bulto» que se cometían constantemente. En particular, se mostraba muy preocupado con el tratamiento que las generaciones anteriores habían dado a las series infinitas.

En efecto, la tradición impuesta durante los siglos XVII y XVIII en el estudio de las series numéricas y las series de funciones se basaba en una inquietante mescolanza de métodos puramente formales y, en algunos casos, cálculos numéricos explícitos. Esta situación queda descrita con exactitud en la monografía de Giovanni Ferraro (n. 1957), *El surgimiento y el desarrollo de la teoría de series hasta principios de 1820*, de reciente publicación, donde se afirma lo siguiente:

> Los matemáticos que utilizaron las series por primera vez estaban interesados en su capacidad para representar cantidades geométricas, y tenían una idea intuitiva sobre su convergencia. Pensaban que una serie representaba una cantidad y poseía significado cuantitativo si y solo si convergía a dicha cantidad. Sin embargo, carecían de una distinción entre sumas finitas e infinitas, lo cual originó la aparición de mecanismos formales consistentes en la extensión infinita de procedimientos finitos. En los trabajos de Newton y Leibniz los aspectos cuantitativos y formales coexistían y la manipulación formal era una herramienta para derivar series convergentes.

Cuando habla de aspectos formales, el autor se refiere a procesos como cambiar el orden de los sumandos o derivar e integrar término a término una suma infinita, cosas que se pueden hacer sin problemas cuando el número de términos a sumar es finito, pero que en aquella época se hacían con sumas infinitas, sin preocuparse excesivamente del rigor. El mayor experto en tratar las series desde un punto de vista formal y, aun a riesgo de cometer errores en el proceso, derivar nuevos resultados —muchos de ellos correctos si se interpretan de forma adecuada— fue Euler. Resulta sorprendente saber que esta teoría de series imperfecta, en la que había grietas por doquier, se mostró muy poderosa a la hora de generar nuevas matemáticas útiles e interesantes. Por ejemplo, las series divergentes se usaban para producir resultados en teoría de números.

Los historiadores de la matemática están convencidos de que si los matemáticos del momento se hubieran aferrado al rigor, negándose a producir un solo resultado cuya prueba no estuviera completamente libre de dudas, prístina, se habría producido de forma necesaria un importante estancamiento en el desarrollo del análisis.

Esto quedó expresado de manera muy clara por la matemática estadounidense Judith Victor Grabiner (n. 1938) cuando, en un artículo de 1974 publicado en *The American Mathematical Monthly*, revista de la Asociación Matemática Estadounidense, que llevaba el sorprendente título «¿Depende del tiempo la verdad matemática?», afirmaba:

> Todos los matemáticos conocen numerosos resultados de las matemáticas del siglo XVIII, resultados que llevan asociados los nombres de Leibniz, Bernoulli, L'Hôpital, Taylor, Euler y Laplace. Pero la probabilidad de que estos se obtuvieran en sus orígenes de un modo absolutamente distinto de la forma en la que se demuestran en la actualidad es muy elevada. Resulta dudoso que Euler y sus contemporáneos hubieran podido deducir sus resultados si se hubieran tenido que constreñir a nuestros estándares de rigor.

Para la autora, experta en las matemáticas de los siglos XVIII y XIX, estaba claro que en el siglo XVIII los matemáticos se obsesionaron con la búsqueda de nuevos resultados, aunque para alcanzarlos tuvieran que dejar de lado algunas cuestiones relacionadas con el rigor:

> Para los matemáticos del siglo XVIII, el fin justificaba los medios. Y hubo numerosos éxitos. Aparecieron nuevas disciplinas, cada cual con sus propios métodos y su propio dominio de resultados: el cálculo de variaciones, la geometría descriptiva y las ecuaciones en derivadas parciales, por ejemplo. Además, se logró una mayor sofisticación en materias ya existentes, como la física matemática y la teoría de la probabilidad.

Lo cierto es que algo muy parecido sucedió con el propio concepto de número. Una teoría rigurosa para los números reales tuvo que esperar nada menos que a las contribuciones de los alemanes Georg Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916) —quien escribió su magnífico libro *¿Qué son y para qué sirven los números?* en 1888—, entre otros. Incluso entrado el siglo XX, el mismísimo Hermann Weyl (1885-1955), matemático alemán y

el más destacado de los discípulos de Hilbert, redactó en 1918 un libro muy crítico sobre la construcción del continuo numérico. Y el trabajo del austríaco-estadounidense Kurt Gödel (1906-1978) y del estadounidense Paul Cohen (1934-2007) sobre la hipótesis del continuo (que finalizó en la década de 1960), lleva hasta la inquietante conclusión de que existen diferentes formas de construir los números reales, que arrojan respuestas distintas a la pregunta, de entrada muy concreta, de cuáles son los cardinales que se alcanzan con los distintos subconjuntos de la recta numérica. Esto, obviamente, implica que en el fondo nunca se sabrá definir la recta numérica con absoluta precisión. Y, sin embargo, se ha trabajado con los números reales, y sigue haciéndose, sin tener grandes dificultades y obteniendo resultados de enorme interés, durante milenios. Incluso entrado el siglo XXI es posible encontrar varios artículos dedicados a definir el conjunto de los números reales de nuevas formas, como por ejemplo en el trabajo del matemático suizo Norbert A'Campo (n. 1941) titulado «Una construcción natural de los números reales», aparecido en 2003.

En cualquier caso, las crisis en matemáticas y, en particular, la del rigor en el análisis matemático han sido siempre fructíferas. Además, ellas revelan que, como también sucede en el resto de ciencias, el avance en la investigación en matemáticas en raras ocasiones se produce de forma lineal, tal como se presenta más adelante en los libros de texto, sino que se logra de un modo mucho más desordenado, en el que intervienen razones y motivaciones muy diversas. Y esta es precisamente una de las causas por las que el estudio de la evolución histórica de las ideas en matemáticas resulta interesante y tiene la capacidad de aportar un valor añadido a nuestra comprensión de las mismas.

SERIES INFINITAS CON NOMBRE PROPIO

En las siguientes líneas se repasarán algunos ejemplos de razonamientos con series infinitas que eran típicos del análisis tal como lo desarrolló Euler en sus *Fundamentos del cálculo diferencial*, y que por tanto formaban parte del material de uso en la época de Abel

(recuérdese que Abel admiraba a Laplace, y este advertía a todos los que deseaban formarse como matemáticos: «Leed a Euler: él es el maestro de todos nosotros»).

La identidad

$$1+x+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

se puede demostrar con solo realizar la multiplicación $(1+x+\ldots+x^n)\cdot(1-x)$ y comprobar que esta vale, en efecto, $1-x^{n+1}$. Si se hace tender a infinito el valor del entero n a ambos lados de la ecuación, se obtiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1+x+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

cuando $|x|<1$, esto es, cuando el valor absoluto de x es menor que uno (el valor absoluto de un número es su valor numérico sin tener en cuenta si es positivo o negativo). Dicha serie, llamada «serie geométrica» porque se corresponde con sumar los miembros de una progresión geométrica de razón x, es de vital importancia en análisis ya que a partir del estudio de sus propiedades se pueden deducir numerosos resultados sobre los llamados «desarrollos en series de potencias» (como, por ejemplo, los desarrollos de Taylor). Para Euler, la identidad entre el miembro de la izquierda y el de la derecha en la fórmula anterior era completa, hasta el punto de hacerlos indistinguibles y, en particular, se producía incluso si la serie era divergente. De manera que sustituyendo $x=-1$, obtenía la fórmula (para nosotros absurda):

$$1-1+1-1+1-1+\ldots=1/2.$$

Así, defendía que:

> Cuando una serie infinita se obtiene como el desarrollo de cierta expresión cerrada, ella puede utilizarse en las operaciones matemáticas como equivalente a dicha expresión, incluso para los casos en los que la serie diverge.
> [...] Si aceptamos esto, la nueva definición de la palabra «suma» coincide con su significado ordinario cuando una serie converge

> y, puesto que las series divergentes no tienen suma en el sentido propio de la palabra, ningún inconveniente puede surgir de esta terminología. Por último, gracias a esta definición podemos preservar la utilidad de las series divergentes y defender su uso de toda objeción.

Un análisis detallado de la obra de Euler muestra que él restringía estas afirmaciones a las series de potencias y, en ese contexto concreto, la variable compleja crearía más adelante una técnica denominada «prolongación analítica de funciones», que justificaría sus afirmaciones en un sentido muy preciso y que, además, resultaría de enorme utilidad en distintas ramas del análisis. Empleando estas ideas, Euler dedujo resultados como la igualdad

$$1+2+3+\ldots=-1/12$$

o, por ejemplo, la ecuación funcional

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos(\pi s/2)\Gamma(s)\zeta(s)\,,$$

donde

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

es la función gamma de Euler y

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$$

es la función zeta de Riemann, que tanta importancia tiene en teoría analítica de números y cuyas propiedades fundamentales se deducen a partir de la ecuación funcional anterior, así como de su descomposición como producto infinito —matemáticamente representado con el símbolo $\prod$—, también debida a Euler,

$$\zeta(s)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}\,,$$

donde el producto se extiende sobre los números primos (aquellos números, diferentes de 1, que solo se pueden dividir entre 1 y ellos mismos, como el 2, 3, 5, 7, ...).

Sin embargo, cuando Abel releyó estos trabajos, bajo la influencia de la obra posterior de Cauchy, le resultaron del todo incomprensibles e injustificados. En una carta a Holmboe se quejaba:

> Las series divergentes son obra del diablo, y es vergonzoso basar en ellas cualquier demostración. Puedes obtener, a partir de ellas, cualquier resultado que desees demostrar, y su uso ha causado numerosos desastres y paradojas. ¿Puede concebirse acaso algo más horrible que observar escurriéndose ante uno la identidad
>
> $$0=1^n-2^n+3^n-4^n+\ldots,$$
>
> donde n es un número entero? *Risum teneatis amici* [Contened la risa, amigos] [...] Los hechos más importantes en las matemáticas se mantienen sin sustanciación. La mayor parte de ellos son correctos, eso es un hecho, y es extremadamente sorprendente. Estoy esforzándome por encontrar una base para ellos. Una tarea muy interesante.

Al parecer, desde la perspectiva de los matemáticos del siglo XVIII, el cálculo era, en esencia, un conjunto de técnicas dedicadas al estudio de la relación existente, para las funciones reales de variable real, entre los procesos de derivación e integración. Estas relaciones eran tanto más importantes cuanto con más intensidad se podían usar para desarrollar aplicaciones en geometría y física, fundamentalmente. Según dicha perspectiva, lo más significativo eran las aplicaciones, que demostraban la increíble utilidad de las matemáticas en el estudio de los fenómenos naturales. Sin embargo, durante el siglo XIX y, en especial a partir de la obra de Cauchy, se implantó una nueva visión del cálculo en la que ahora tanto un enunciado preciso de los conceptos sobre los que reposa la disciplina como la demostración rigurosa de todos los resultados pasaban a primer plano. Abel se adhirió a este enfoque, espoleado por el uso aparentemente paradójico que hacía Euler de

SUMACIÓN DE SERIES DIVERGENTES

Existen varias formas de asociar un valor numérico a una serie divergente. Para ello, basta introducir un criterio de sumación lineal que, cuando se aplique a una serie convergente del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

recupere su valor en el sentido usual del término, que es el límite de las sumas parciales

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty}(a_0 + a_1 + \ldots + a_N).$$

Dos criterios de sumación importantes son el de Césaro y el de Abel. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ se dice que es sumable en el sentido de Césaro si existe el límite

$$C(\{a_n\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k,$$

donde $S_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k$. En cambio, la misma serie es sumable en sentido Abel si existe el límite

$$A(\{a_n\}) = \lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Es fácil comprobar que $C(\{(-1)^n\}) = A(\{(-1)^n\}) = 1/2$, por lo que cualquiera de los dos métodos afirma la «igualdad»

$$1-1+1-1+1-1+\ldots = 1/2.$$

Los métodos de sumación se han utilizado en contextos muy diversos. Por ejemplo, el de Césaro garantiza la convergencia uniforme (de las medias de Césaro) de la serie de Fourier de cualquier función continua, algo que falla si se calcula la suma en sentido ordinario, pues existen funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en todo punto. Quizás este ejemplo no resulte impresionante para alguien que no sea matemático. Sin embargo, sí lo es el hecho de que las series divergentes se utilicen en física. En concreto, la igualdad $1+2+3+\ldots = -1/12$, obtenida de considerar la prolongación analítica al plano complejo de la función zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

y evaluarla en el punto $s = -1$, es necesaria para explicar el efecto Casimir, que asocia una energía finita al vacío (desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos, lejos de «estar vacío», se considera ocupado por ondas electromagnéticas que fluctúan, y cuya energía final no llega a cancelarse completamente, y por un mar de partículas y antipartículas virtuales que no se observan de manera directa), produciendo estimaciones numéricas que concuerdan con los datos experimentales.

Métodos que aceleran la convergencia

Algunos métodos de sumación, cuando se aplican a series convergentes, generan una sucesión que converge a la suma de la serie mucho más rápido que las sumas parciales de la serie original, de manera que se utilizan para «acelerar la convergencia» de las series. Euler ya observó que esto se producía en ciertos casos. Por otra parte, la búsqueda de resultados que garantizasen que si una serie era sumable en sentido generalizado también lo era en sentido ordinario, originó, tras el trabajo del austríaco Alfred Tauber (1866-1942) de 1897, los llamados «teoremas tauberianos», los cuales recibieron un enorme impulso gracias a varias aportaciones del estadounidense Norbert Wiener (1894-1964) en la década de 1930.

las series divergentes. De este modo, a diferencia de Cauchy, cuyo proyecto de refundación abarcaba todo el análisis, Abel decidió concentrar sus esfuerzos en aclarar algunos aspectos importantes de la teoría de series.

En lo referente a su viaje, Abel prolongó cuanto pudo su estancia en Berlín. Según lo estipulado cuando pidió su beca, el destino principal era París y, de Alemania, se consideraba prioritario que visitara Gotinga, donde vivía Gauss. Pero Abel había oído hablar del hermetismo de Gauss y, a sabiendas de que este se mostraba inaccesible, decidió retrasar su visita lo máximo posible. Le escribió la siguiente nota a Holmboe:

> Con gran probabilidad, me quedaré en Berlín hasta finales de febrero o marzo. Entonces viajaré a Gotinga pasando por Leipzig y Halle. No para ver a Gauss, porque se dice que es intolerablemente reservado, sino por la biblioteca, que, por lo visto, es excelente.

Y eso hizo. O al menos lo intentó, porque tenía previsto realizar la visita a Gotinga acompañado de Crelle y, posteriormente, viajar con él a París. Sin embargo, esta expectativa se frustró en el último momento. Tras haber visitado primero Leipzig y estando ya en Freiberg, donde pasó un mes entero porque allí encontró buenas condiciones para trabajar y donde redactó su artículo so-

EL VIAJE «TURÍSTICO» DE ABEL

Niels Henrik Abel, junto con Cæsar Peter Møller Boeck (1798-1877), Baltazar Mathias Keilhau (1797-1858), Nicolay B. Møller (1802-1860) y Otto Tank (1800-1864) constituían una élite de jóvenes promesas científicas en las que Noruega depositaba sus esperanzas. En 1825 los cinco emprendieron un viaje científico por el continente. El objetivo primario de Abel era visitar París, el centro mundial de las matemáticas en aquel momento. Sin embargo, después de su estancia en Berlín decidió cambiar sus planes para permanecer más tiempo con sus amigos y visitar juntos Dresde, Praga, Viena, Graz, Trieste, Venecia, Verona, Bolzano, Innsbruck, los Alpes Dolomitas y finalmente Basilea, desde donde, en solitario, retomó su viaje a París. Puede considerarse que para Abel este fue un viaje turístico, aunque nunca dejó de trabajar ni de contactar con matemáticos locales allí donde podía. De todas formas, consciente de que Hasteen no aprobaba su decisión y de que estaba incumpliendo el programa establecido en su beca, aprovechó su primera carta para justificarse: «Después de todo, soy de una naturaleza tal que no puedo, o al menos no sin grandes dificultades, permanecer solo. En soledad me vuelvo melancólico y entonces no estoy en el mejor estado de ánimo para hacer nada». Y en otro fragmento, tristemente profético, argumentaba: «Viajaré al extranjero solo una vez en mi vida. ¿Puede alguien culparme por querer ver algo de los usos y costumbres del sur? Yo soy capaz de trabajar bien en el curso de mis viajes. Si estoy en Viena, y viajando desde allí a París el camino más directo pasa a través de Suiza, ¿por qué no debería verla un poco? ¡Dios sabe que no soy insensible a la belleza de la naturaleza!».

Keilhau, padre de la geología noruega y gran amigo de Abel. Tras la muerte de este, se ocupó de su prometida Crelly casándose con ella.

La ciencia y el dinero público

En pleno siglo xx, el matemático estadounidense Steven Smale (n. 1930) fue acusado por el asesor científico del presidente Johnson de malgastar el dinero de los contribuyentes en las playas de Río de Janeiro. En su defensa Smale esgrimió que allí había descubierto la «herradura» —idea geométrica que explicaba la presencia del caos en sistemas deterministas— y la demostración de la conjetura de Poincaré en dimensión $n \geq 5$, que le valió la medalla Fields en 1966. Los científicos, como Abel y Smale, tienen que rendir cuentas a quien los financia, pero deben ser juzgados por la calidad de sus obras, no por el lugar donde las han llevado a cabo.

bre el teorema del binomio, recibió una carta de Crelle informándole de que sus numerosas ocupaciones le impedían acompañarle. Entonces tuvo que optar entre continuar su ruta en solitario o, por el contrario, cambiarla por un viaje más relajado, en compañía de varios de sus amigos noruegos, a Praga, Viena, Italia y después a París. Su carácter melancólico y su necesidad de compañía le hicieron optar por esta segunda vía, por lo que abandonó su idea de visitar Gotinga. Después de todo, como le escribiría a Hansteen, la biblioteca de Gotinga no podía «superar a las de París».

EL TEOREMA DEL BINOMIO, ANTES DE ABEL

Uno de los resultados que se consideraron fundamentales para el desarrollo del cálculo fue el teorema de Taylor, que establece la identidad

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \cdots$$

bajo ciertas condiciones sobre la función f. En particular, se asume que la función se puede derivar tantas veces como se desee, en todos los puntos de un pequeño intervalo que contiene el punto a. La fórmula indica cómo recuperar el valor de la función cerca de dicho punto (es decir, al evaluarla un poco más allá del punto a, en el punto $a+h$, donde h es un número de módulo pequeño, a partir de conocer los valores de todas las derivadas de la función en a ($f^{(n)}(a)$ denota la derivada n-ésima de la función evaluada en dicho punto y $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (n-1)\cdot n$ es el factorial de n). A día de hoy esta igualdad se deduce aplicando reiteradas veces el teorema del valor medio a la diferencia $f(a+x)-P_{n,a}(x)$, donde

$$P_{n,a}(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

es el polinomio de Taylor de la función en el punto de referencia h. Este proceso lleva a una identidad del tipo

$$f(a+h) = P_{n,a}(h) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

donde ξ_h representa un punto —cuyo valor no se conoce de antemano, pero cuya existencia está garantizada— que pertenece al intervalo abierto $(a, a+h)$ y al imponer ciertas condiciones sobre la función y hacer que el grado del polinomio crezca de manera indefinida, se obtiene el resultado deseado. Sin embargo, cuando el teorema de Taylor se dedujo por primera vez, no se conocía el teorema del valor medio (introducido por Cauchy en la década de 1820) y, por tanto, este se demostraba de un modo completamente distinto.

Un caso particular del teorema de Taylor que resulta muy importante es el llamado «teorema del binomio»,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + \cdots$$

Cuando m es un entero positivo, la fórmula se demuestra por inducción (un método que pasa de lo «particular» a lo «general») de forma sencilla. Este caso, que da lugar a una suma finita en el miembro de la derecha, era conocido desde los tiempos del filósofo, matemático y físico francés Blaise Pascal (1623-1662), e incluso antes, pero con la llegada del cálculo, matemáticos como el inglés Isaac Newton (1643-1727), el escocés James Gregory (1638-1675), el alemán Gottfried Leibniz (1646-1716), etc., mostraron interés por hallar una expresión para el binomio $(1+x)^m$ que fuera aplicable para valores arbitrarios de m. Como se ha advertido, este resultado se sigue de aplicar el desarrollo de Taylor a la función x^m. Sin embargo, como pronto observaría Euler, dicho cálculo pasa por hallar la derivada de x^m para m general, lo cual se hacía en aquel momento precisamente usando el teorema del binomio y, por tanto, entrando en un círculo vicioso. Por supuesto, se sabe que esta derivada se puede calcular de forma directa aplicando logaritmos y la regla de la cadena, que proporciona el cálculo de la derivada de la composición de funciones. Otra técnica que podría haberse utilizado en la época era aplicar la fórmula

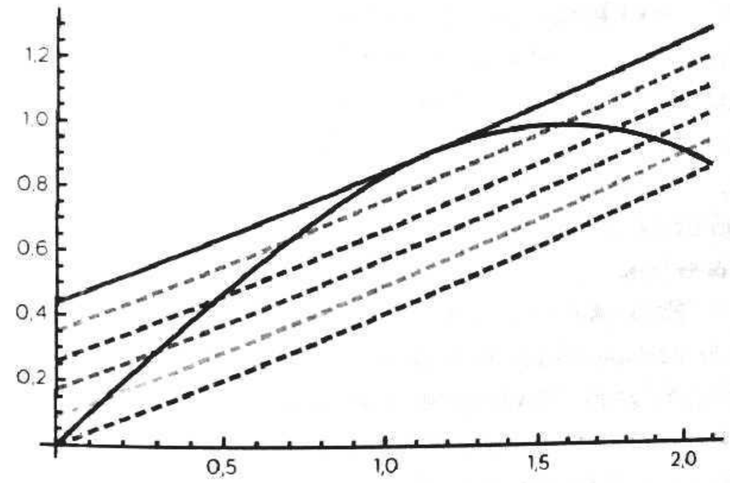
EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Se supone que la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y es derivable en todos los puntos del interior de dicho intervalo. Entonces existe un punto c del intervalo (a,b) tal que la derivada en este punto, es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto c, satisface la fórmula

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Interpretación geométrica

En términos geométricos esto significa que, para cierto punto c del intervalo (a,b), la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$. Una demostración sencilla se logra con solo observar que la función, al ser continua en el intervalo $[a,b]$, está acotada, por lo que, si la recta que pasa por los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ se desplaza de manera paralela, llegará un momento en el que esta abandonará la curva f. En ese instante preciso, la «recta desplazada» debe coincidir con la tangente a la curva de la función. Este teorema, que se debe a Cauchy, es un ingrediente fundamental en la prueba del teorema de Taylor y de otros muchos resultados importantes del análisis matemático, incluyendo el teorema fundamental del cálculo. Su importancia se refleja también en las numerosísimas generalizaciones y variaciones de que ha sido objeto, en especial durante el siglo XX.



Representación de la curva f. La recta continua corresponde a la tangente a la gráfica de f, y las rectas en línea discontinua son las paralelas a dicha recta tangente.

en el disco abierto cuyo centro es el origen de coordenadas y su radio corresponde al módulo de x_0.

A continuación, demostró que si las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ y } \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n,m\geq 0;n+m=k} a_n b_m\right)$$

son todas convergentes, se verifica la igualdad

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n,m\geq 0;n+m=k} a_n b_m\right).$$

Con todos estos ingredientes, Abel pudo abordar lo que se considera la primera prueba rigurosa y completamente general del teorema del binomio.

ABEL Y LAS ECUACIONES FUNCIONALES

Como se ha podido comprobar, algunas ecuaciones funcionales sencillas tuvieron un papel destacado en las pruebas del teorema del binomio presentadas por Cauchy y Abel. De hecho, a ambos se les considera pioneros en esta nueva rama del análisis (aunque existen contribuciones anteriores por matemáticos como el francés Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)). La sencilla ecuación $a(x+y)=a(x)+a(y)$ que Abel había usado en su demostración del teorema del binomio había sido estudiada por Cauchy en 1821, junto con las ecuaciones $a(x+y)=a(x)\,a(y)$, $a(xy)=a(x)+a(y)$ y $a(xy)=a(x)\cdot a(y)$. Estas se consideran, de hecho, de gran importancia en la teoría de ecuaciones funcionales y su estudio ha motivado numerosas investigaciones desde su aparición hasta la actualidad. Para apoyar esta afirmación bastará observar que uno de los textos más influyentes del siglo XX en esta materia, escrito por el matemático polaco Marek Kuczma (1935-1991), publicado en polaco en 1985 y traducido al inglés y republicado por Birkhauser (una de las editoriales más influyentes del mundo matemático actual) en 2009, dedica más de trescientas páginas a su estudio.

> «Dedicaré todos mis esfuerzos a arrojar luz sobre la inmensa obscuridad que reina actualmente en el análisis.»
>
> — NIELS HENRIK ABEL.

Entre los años 1823 y 1827, Abel profundizaría en el estudio de las ecuaciones funcionales, y publicó varios artículos que también tendrían carácter fundacional. En el primero de ellos introdujo un método para, a partir del cálculo de derivadas parciales a ambos lados de una ecuación funcional, resolver ecuaciones que contenían varias funciones incógnitas. Particularmente importante fue su segundo trabajo en este tema, donde resolvió la siguiente cuestión: ¿qué funciones $f(x, y)$ tienen la propiedad de que la función $f(z, f(x, y))$ es simétrica respecto de las variables x, y, z? En términos de ecuaciones, se trata de resolver el sistema

$$\begin{aligned} &f(z,f(x,y))=f(z,f(y,x))=f(x,f(y,z))\\ &=f(x,f(z,y))=f(y,f(x,z))=f(y,f(z,x)), \end{aligned}$$

que es una combinación de las propiedades de asociatividad y conmutatividad. Si se piensa en $f(x, y)$ como una operación binaria definida sobre los números reales, $f(x, y)= x\circ y$ (es decir, se interpreta la función como una regla que, dados dos números reales cualesquiera x, y, les asocia un nuevo número real, que se puede denotar por $x\circ y$), las ecuaciones anteriores se escriben como

$$\begin{aligned} &z\circ(x\circ y)=z\circ(y\circ x)=x\circ(y\circ z)\\ &=x\circ(z\circ y)=y\circ(x\circ z)=y\circ(z\circ x), \end{aligned}$$

con lo cual queda claro que Abel buscaba una caracterización de lo que hoy se llama «semigrupos conmutativos uniparamétricos». En un artículo de 1826, el matemático noruego demostró que si $f(x, y)$ satisfacía estas ecuaciones, entonces existía una función $g(t)$ tal

LA DEMOSTRACIÓN DE ABEL: UNA EXHIBICIÓN DE VIRTUOSISMO

La demostración del teorema del binomio revela el dominio de Abel para manipular cantidades complejas, y la sutileza con la que supo abordar un problema que llevaba años dando quebraderos de cabeza a las mentes más brillantes de la época. Aquí se muestra, por primera vez, el genio que fue Abel. El noruego deseaba demostrar el teorema en su máxima generalidad, por lo que asumió que tanto x como m son números complejos y, a continuación, tras diversas manipulaciones algebraicas, descompuso la serie binomial en sus partes real y compleja, que se denotan aquí por $p(x)$ y $q(x)$, respectivamente,

$$\varphi(m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k = p(x) + iq(x),$$

y que Abel calculó explícitamente. En concreto, probó que

$$p(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos(\theta_k) |x|^k \text{ y } q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k sen(\theta_k) |x|^k$$

para ciertos números positivos λ_k y ciertos números reales θ_k, que dependen de los valores de k y de m. A continuación comprobó que

$$\frac{\lambda_{k+1} |x|^{k+1}}{\lambda_k |x|^k} = \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} |x|$$

converge a $|x|$ cuando k tiende a infinito, por lo que el criterio del cociente le permitía asegurar que si el módulo de x es mayor que 1, la serie binomial diverge, y si es inferior a 1, converge (independientemente del valor de m). El caso $|x|=1$ lo estudió aparte, y probó que si $|x|=1$, $-1<m<\infty$ y $x\neq -1$, la serie converge. Además, lo mismo sucede si $x=-1$ y $m>0$. Para el resto de casos, demostró que la serie diverge.

Una solución del binomio

En este punto del proceso, Abel ya disponía de las condiciones bajo las cuales se podía garantizar la convergencia de la serie binomial. En particular, había demostrado que si $|x|<1$, entonces $\varphi(m)$ está bien definida para todo valor complejo m y es continua. Utilizando ahora su criterio para el cálculo del producto de dos series convergentes, probó que $\varphi(n+m)=\varphi(n)\cdot\varphi(m)$ para valores arbitrarios de n y m. Escrita en términos del módulo y el argumento de los números complejos, esta ecuación se traduce en

$$\begin{cases} f(n+m) = f(n)\cdot f(m) \\ \phi(n+m) = \phi(n) + \phi(m) + 2k\pi \end{cases},$$

donde $\varphi(m) = f(m)^{i\phi(m)}$. Como $f(m)$ representa el módulo de $\varphi(m)$, se trata de una función positiva, por lo que puede escribirse como $f(m)=e^{F(m)}$ y se obtiene la nueva ecuación funcional

$$F(n+m) = F(n) + F(m),$$

en la que la función F está definida para todos los puntos del plano complejo, es continua, y toma valores en la recta real. En estas condiciones, las únicas soluciones de la ecuación son de la forma $F(m) = aRe(m) + bIm(m)$, con a, b números reales. De manera análoga, la ecuación funcional satisfecha por la función ϕ arroja soluciones del tipo $\phi(m) = \alpha Re(m) + \beta Im(m) - 2k\pi$ (aquí $Re(\alpha+i\beta)=\alpha$ y $Im(\alpha+i\beta)=\beta$ denotan, respectivamente, las partes real e imaginaria del número complejo $\alpha+i\beta$). Tras ajustar todos los cálculos, Abel desenmascaró los valores de a, b, α, β para concluir que si $1+x=\rho e^{i\theta}$ y $|x|<1$ entonces

$$\varphi(m) = \rho^{Re(m)} e^{-\theta Im(m)} e^{i(\theta Re(m) - Im(m)\log\rho)},$$

que es uno de los valores de $(1+x)^m$.

que $g(f(x, y)) = g(x) + g(y)$. Es más, las funciones $f(x, y)$, $g(t)$ estaban determinadas por la ecuación diferencial (un tipo de ecuación que relaciona la función con sus derivadas)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} g'(y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} g'(x),$$

cuya solución calculó de forma explícita.

Por último, en un artículo de 1827, Abel resolvió, para las funciones incógnita f, g, h, la ecuación funcional compuesta $g(x) + g(y) = h(xf(y) + yf(x))$, que, obviamente, generalizaba la ecuación de Cauchy $a(x+y) = a(x) + a(y)$.

Sus contribuciones en este tema se basaron siempre en reducir las ecuaciones funcionales que se estaban estudiando a ciertas ecuaciones diferenciales, que luego resolvía. Dado que las ecuaciones iniciales no requerían, por sí mismas, que las funciones involucradas fuesen diferenciables, el problema de resolverlas sin asumir regularidad alguna se planteaba como algo natural. Tanto es así y tan importante (y difícil) era esta cuestión, que Hilbert la

propuso de manera explícita en una nota al quinto enunciado de su famosa lista de problemas abiertos en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900:

> [...] llegamos al extenso e interesante campo de las ecuaciones funcionales, que hasta la fecha ha sido ampliamente investigado asumiendo la diferenciabilidad de las funciones intervinientes. Muchas ecuaciones tratadas en la literatura, en particular las ecuaciones estudiadas por Abel de forma tan incisiva, no muestran características intrínsecas que requieran la hipótesis de diferenciabilidad de las funciones que aparecen en las mismas...

Responder a esta cuestión ha sido, de hecho, un tema de investigación muy prolífico en el que aún hoy se realizan contribuciones de enorme calado, aunque no era, por sí mismo, el tema principal del quinto problema sino solo una observación de corte filosófico. Si se ciñe al enunciado preciso del problema planteado por Hilbert, este se puede expresar, con la terminología actual, en pocas palabras: se trata de saber si todo grupo topológico localmente euclídeo es un grupo de Lie. Obviamente, se trata de un enunciado corto pero técnico. Para entenderlo sería necesario explicar por separado cada uno de los conceptos implicados. Baste decir que detrás del problema hay un intento de comprender algunos aspectos geométricos del mundo y, en particular, por qué las transformaciones que preservan distancias (concepto que por sí mismo no requiere la diferenciabilidad) tienen buenas propiedades analíticas. De ahí la observación de Hilbert, que conecta este problema de geometría con las ecuaciones funcionales y, en particular, con los métodos empleados por Abel para su resolución.

Para mostrar que el problema de la regularidad no tiene una respuesta fácil, ni siquiera para ecuaciones funcionales sencillas, veamos cómo se resuelve para la más simple de todas, la ecuación funcional de Cauchy $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Como ya hemos comentado, Cauchy introdujo esta ecuación en su *Curso de análisis* de 1821, entre otras cosas para estudiar el teorema del binomio. Él demostró que si la función $f(x)$ resuelve esta ecuación y es continua sobre la recta real, entonces existe una cierta constante c tal que $f(x)=cx$. En 1875, Gaston Darboux (1842-1923) demostró que basta asumir la continuidad en un solo punto. Esto es, en efecto, sencillo de ver. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la función es continua en el cero, y tomemos un punto a cualquiera de la recta. Si la función es aditiva, entonces para cada punto $x\in\mathbb{R}$ se tiene que

$$|f(x)-f(a)| = |f(x)+f(0)-f(0)-f(a)| = |f(x-a)-f(0)|,$$

y como $|x-a|$ se hace pequeño precisamente cuando x está cerca de a, la continuidad en a se deduce de la continuidad en 0. Darboux demostró algo más fuerte. Concretamente, probó que si existe un intervalo abierto de la recta, por muy pequeño que sea, donde la función permanece acotada, y la función es aditiva, entonces es de la forma $f(x)=cx$. La prueba más elegante que se conoce de este resultado se debe al matemático español Ricardo San Juan (1908-1969). Fue publicada en 1946 y es uno de los pocos artículos escritos en castellano que se considera cita obligada en todo texto de ecuaciones funcionales. En él, San Juan demuestra de forma muy sencilla que si una función aditiva no es de la forma $f(x)=cx$, entonces los puntos de su grafo, $G(f)=\{(x,f(x)): x\in\mathbb{R}\}$ forman un subconjunto denso del plano. Es decir, para cada punto (α, β) del plano y todo $\varepsilon>0$, por muy pequeño que este sea, siempre existe un punto de la recta x_0 tal que la distancia entre los puntos (α, β) y $(x_0, f(x_0))$ es inferior a ε. Piénsese que esta es una propiedad extraordinaria, pues implica que las soluciones de la ecuación de Cauchy son extremadamente regulares o extremadamente irregulares. Con un poco de teoría de la medida, el resultado de Darboux se puede refinar mucho más, en otra dirección distinta. En efecto, basta que la solución de la ecuación esté acotada en un conjunto con medida de Lebesgue positiva para que sea necesariamente de la forma $f(x)=cx$. Esto se deduce de que si un conjunto $A\subset\mathbb{R}$ tiene medida positiva $|A|>0$, entonces el conjunto $A+A=\{x+y: x, y\in A\}$ contiene un intervalo abierto. Se sigue que si $f(x)$ es aditiva y su restricción al conjunto A está acotada por la constante M, entonces la restricción al conjunto

$A+A$, que contiene un intervalo abierto, está acotada por $2M$, puesto que si $x, y \in A$ entonces

$$|f(x+y)| = |f(x)| + |f(y)| \leq M + M = 2M.$$

Por otra parte, en 1906, Georg Hamel (1877-1954) demostró, utilizando el axioma de elección (un principio básico de la teoría de conjuntos, pero nada constructivo), que existen soluciones de la ecuación de Cauchy que no son regulares.

CAPÍTULO 2

En busca de la solución perdida

En 1824 Abel publicó a sus expensas un breve panfleto de seis páginas demostrando la imposibilidad de resolver la ecuación general de quinto grado por radicales. En Berlín, August Leopold Crelle reconoció la importancia de sus ideas y le ofreció publicar en su revista una versión ampliada, que apareció en 1826. Sin embargo, Abel no pudo caracterizar cuáles eran las ecuaciones resolubles por radicales, tarea que completó otro genio precoz y de vida trágica: Évariste Galois.

El 12 de febrero de 1535, los matemáticos italianos Antonio Maria del Fiore (ca. 1506-?) y Niccolò Fontana (ca. 1500-1557) dirimieron sus diferencias en un desafío matemático público. En este tipo de batallas, típicas del Renacimiento italiano, cada oponente retaba a su rival a resolver una serie de difíciles problemas matemáticos con el objetivo de aumentar su reputación y las posibilidades de obtener un trabajo bien remunerado. Ambos prepararon una lista de preguntas cuyas respuestas dependían de saber resolver ciertas ecuaciones cúbicas, y cada uno guardaba un as en la manga: una fórmula secreta que proporcionaba las soluciones. Pero la fórmula de uno de ellos era más poderosa e iba a permitirle humillar a su rival.

Las ecuaciones de grado dos o cuadráticas, $ax^2+bx+c=0$ donde a es un número diferente de cero, aparecieron por vez primera en problemas relacionados con la medición de áreas, remontándose su resolución a los babilonios hace 3600 años. Aunque ellos no disponían de notación algebraica, y por tanto carecían de una fórmula general, sí disponían de una regla para resolver cualquier ecuación cuadrática con números concretos. En notación actual, el cambio de variable

$$y = x + \frac{b}{2a}$$

transforma la ecuación general de grado dos en la ecuación reducida

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

que se resuelve sin más que tomar raíces cuadradas:

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Teniendo en cuenta que $x = y - \frac{b}{2a}$, se llega a la familiar fórmula para la solución general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Esta expresión presenta una peculiaridad: si la cantidad b^2-4ac, llamada «discriminante», es cero, entonces la única solución de la ecuación es

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

En el caso de que el discriminante sea positivo, la fórmula proporciona dos soluciones distintas, en correspondencia con el hecho de que un número positivo tiene dos raíces cuadradas distintas (por ejemplo $\sqrt{9} = \pm 3$). Sin embargo, cuando el discriminante es negativo, la fórmula no proporciona soluciones reales, puesto que el cuadrado de cualquier número real, sea este positivo o negativo, es siempre positivo y, por tanto, no existe la raíz cuadrada de un número negativo. Hasta la adopción de los números complejos, en el siglo XIX, los matemáticos considerarían que la ecuación cuadrática no tenía solución en el caso de discriminante negativo.

UNA AGRIA DISPUTA MATEMÁTICA: LA SOLUCIÓN DE LA CÚBICA

No se hicieron avances significativos en la resolución de ecuaciones hasta que los matemáticos árabes iniciaron el estudio del álgebra. La palabra «álgebra» (*al-jabr*) tuvo su origen en el libro del matemático persa al-Juarismi (ca. 780-ca. 850) *Hisab al-jabr wa'l-muqabala*, escrito en la primera mitad del siglo IX, y significa «recomponer», puesto que se trataba de recuperar el valor de la x que

estaba perdido en la ecuación. Con la misma raíz se llamaba también «algebrista» a un componedor de huesos tal, y como aparece en el libro *Don Quijote de la Mancha*, de Miguel de Cervantes. El matemático y poeta del siglo XI Omar Khayyam fue el primero en resolver ciertas ecuaciones cúbicas desde un punto de vista geométrico, al interpretar las soluciones como puntos de intersección de dos secciones cónicas, aunque seguía sin disponer de una fórmula general.

En 1494, el fraile y matemático italiano Luca Pacioli (1445-1517) publicó su libro *Summa de Arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, un compendio de las matemáticas de su tiempo, inspirado en los trabajos de los matemáticos italianos Leonardo de Pisa, conocido como *Fibonacci* (ca. 1170-1250), y Piero della Francesca (ca. 1415-1492), que contenía un primitivo simbolismo algebraico al llamar a la incógnita *co*, abreviatura de *cosa*. En su obra, Pacioli consideró la cúbica imposible de resolver. Este comentario espoleó al matemático de la Universidad de Bolonia Scipione del Ferro (1465-1526), quien obtuvo por primera vez una fórmula para las ecuaciones cúbicas de la forma $x^3+mx=n$. Del Ferro transmitió su fórmula secreta a su discípulo Fiore, por otro lado un matemático mediocre.

Niccolò Fontana era más conocido como *Tartaglia* ('el Tartamudo') debido a un sablazo que recibió en la cara siendo niño durante el asedio francés a Brescia y que le desfiguró el rostro para dificultarle el habla de por vida. Tartaglia había descubierto una fórmula para las cúbicas de la forma $x^3+mx^2=n$ y cuando llegó a los oídos de Fiore, este lo desafió a un reto público. Después de aceptar el duelo, Tartaglia se esforzó en resolver otros casos de ecuaciones cúbicas y lo consiguió poco antes de finalizar el plazo establecido para el reto. En notación actual, se procedería de la siguiente manera para resolver la cúbica: la ecuación general de tercer grado $x^3+bx^2+cx+d=0$ se transforma mediante el cambio de variable

$$y = x + \frac{b}{3}$$

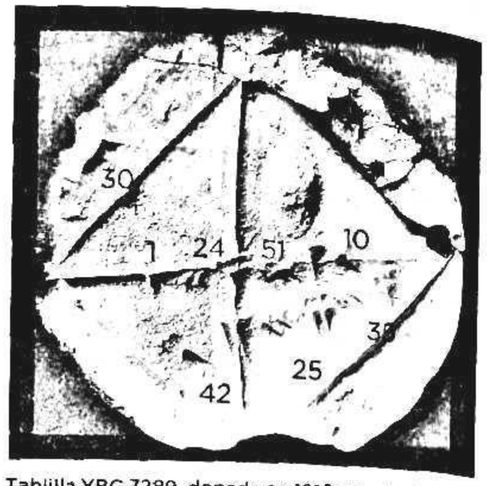
en una ecuación reducida $y^3+py+q^3=0$, donde el término en y^2 ha desaparecido. Haciendo $y=u+v$ se obtiene:

$$y^3+py+q=(u+v)^3+p(u+v)+q=u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q$$

LA IMPORTANCIA DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS

Las ecuaciones algebraicas aparecen en múltiples contextos y por eso desde muy antiguo se han desarrollado técnicas para intentar resolverlas. Por ejemplo, en la tablilla cuneiforme YBC 7289, perteneciente a la Colección Babilónica de la Universidad de Yale, se calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 30 unidades, lo cual es equivalente a resolver la ecuación cuadrática $x^2 = 2 \cdot 30^2$. Para ello se da una aproximación realmente precisa a $\sqrt{2}$ (en notación sexagesimal, 1;245110, que en nuestra notación decimal se corresponde con

$$\frac{30547}{21600} = 1,414212\overline{962}\,).$$



Tablilla YBC 7289, donada en 1912 por el millonario John Pierpont Morgan a la Universidad de Yale.

Se cree que esta aprovechación tan buena fue obtenida mediante el proceso iterativo de «división y valor medio».

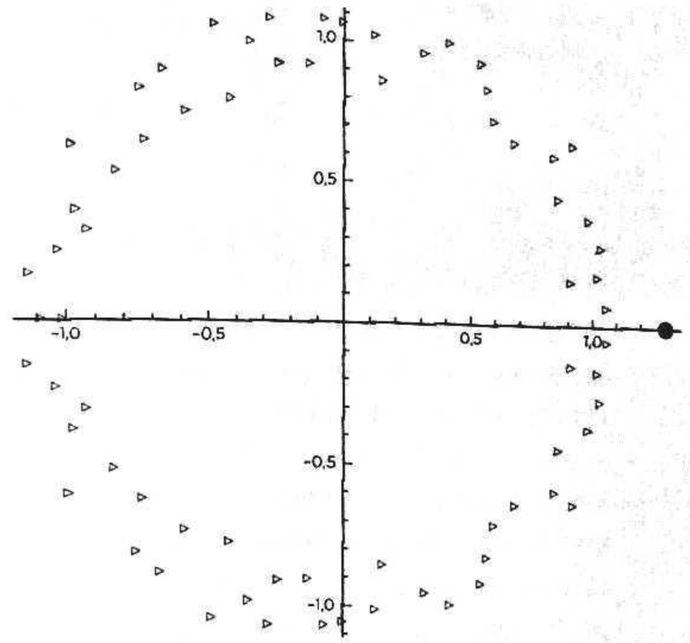
La sucesión audioactiva

La siguiente sucesión fue propuesta por el matemático británico John Horton Conway (n. 1937) en 1985: se empieza por cualquier número natural, por ejemplo 11, y a continuación se cuentan en voz alta los grupos de dígitos que contiene el número anterior, «dos unos», 21, «un dos un uno», 1211, «un uno un dos dos unos», 111221, ... generando así la llamada sucesión «audioactiva» 11, 21, 1211, 111221, ...

Conway se preguntó cuál sería la longitud $L(n)$ del término que ocupa la posición n-ésima en la sucesión (en el ejemplo anterior, $L(1)=2$, $L(2)=2$, $L(3)=4$, $L(4)=6$, ...). La sorprendente respuesta es que, salvo para la sucesión que empieza por 22 y que es constante, la longitud $L(n)$ para valores grandes de n es proporcional a λ^n, donde λ, la llamada constante de Conway, es la única solución real positiva de la siguiente ecuación algebraica de grado 71:

$$x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} - x^{59} + 2x^{58} + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} - 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38} - 7x^{37} + 7x^{36} + x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} + 9x^{26} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^9 + x^7 - 7x^6 + 7x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 3x - 6 = 0.$$

Sin lugar a dudas, esta es una de las ecuaciones algebraicas con significado matemático más extraordinarias que se conocen. Con respecto a la constante de Conway se sabe que $\lambda = 1,303577...$



Representación en el plano complejo de las soluciones de la ecuación algebraica anterior. El punto señalado a la derecha se corresponde con la constante de Conway.

y se cumple que $y^3 + py + q = 0$ si $u^3 + v^3 + q = 0$ y $3uv + p = 0$. Entonces u y v satisfacen el sistema de ecuaciones

$$u^3 + v^3 = -q,\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Despejando $v^3 = -q - u^3$ en la primera ecuación e insertándola en la segunda, se llega a la ecuación de orden seis

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0,$$

que se puede reescribir como

$$(u^3)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Esta es una ecuación cuadrática en u^3 y puede por tanto resolverse usando la fórmula conocida para las ecuaciones de grado dos y que se ha obtenido con anterioridad:

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Sustituyendo en la fórmula para v^3

$$v^3 = -q - u^3 = -q + \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

entonces la solución de la cúbica reducida es

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Fiore lo apostó todo a una carta en su batalla con Tartaglia: los treinta problemas que presentó en su lista se reducían a resolver ecuaciones cúbicas de un mismo tipo, el que le había enseñado a resolver su maestro Del Ferro. Tartaglia sabía solucionar todos los problemas de Fiore y puso en su lista problemas que involucraban diferentes tipos de cúbicas y que estaban más allá de la capacidad de su rival. La victoria de Tartaglia fue rotunda y le proporcionó una gran fama que atrajo sobre él la atención de uno de los personajes más peculiares de la historia de las matemáticas: Gerolamo Cardano (1501-1576), matemático, médico, ludópata y hereje cuya turbulenta vida está retratada con inusual franqueza en su *Libro de mi vida*.

Tras escuchar la proeza de Tartaglia, Cardano trató infructuosamente de resolver la cúbica por sí mismo. Obsesionado como estaba con la solución, empezó a presionar a Tartaglia para que le revelara su secreto. Por supuesto Tartaglia se negó a hacerlo, ya que su reputación se basaba en ser el único en conocer la fórmula para la cúbica. Finalmente, en 1539, Cardano le tendió una trampa: sabía que Tartaglia estaba necesitado de dinero, pues su humilde

puesto como profesor en Brescia apenas le daba para vivir, y con la promesa de un patrocinio por un noble local lo invitó a su casa en Milán. Cardano fue un magnífico anfitrión y por fin consiguió vencer la resistencia de Tartaglia, quien le entregó la fórmula para la cúbica en forma de poema cifrado y bajo juramento de no desvelarla:

Cuando el cubo está con las cosas
y se iguala a un número completo,
encuentra otros dos números de los cuales sea diferencia.

Después considerarás rutinario
que su producto sea siempre igual
al tercio del cubo de la cosa.

Entonces el resultado general
de sus raíces cúbicas restadas
te dará el valor de la cosa principal.

En el segundo de estos casos,
cuando el cubo permanece aislado,
observarás los siguientes pasos:
del número rápidamente harás dos partes,
de modo que una multiplicada por la otra produzca
el tercio del cubo de la cosa exactamente.
Después de las cuales, como regla general,
sumarás juntas sus raíces cúbicas
y esta suma será lo que buscas.

El tercero de nuestros casos
se resuelve como el segundo si te esmeras,
ya que por naturaleza son casi iguales.

Esto encontré, y no con pasos lentos
en el mil quinientos treinta y cuatro
con fundamentos muy firmes y robustos
en la ciudad rodeada por el mar.

Cardano mantuvo el secreto durante años, hasta que se hizo imperioso para él publicar la fórmula: Lodovico Ferrari (1522-1565), su talentoso ayudante, había descubierto cómo resolver la ecuación cúbica general y haciendo un esfuerzo extraordinario también había encontrado la solución para la ecuación cuártica $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$. Mediante el cambio de variable

$$y = x + \frac{b}{4}$$

se convierte en una ecuación reducida $y^4+py^2+qy+r=0$, sin término en y^3 o equivalentemente

$$\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)^2 = -qy - r + \frac{p^2}{4}.$$

El ingenioso truco de Ferrari consistió en observar que si $u \neq 0$ es solución de la siguiente ecuación cúbica auxiliar, llamada «ecuación resolvente»,

$$8u^3 + 8pu^2 + (2p^2 - 8r)u - q^2 = 0,$$

entonces

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + u\right)^2 = \left(\sqrt{2u}\,y - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2,$$

y, por tanto,

$$y^2 + \frac{p}{2} + u = \pm\left(\sqrt{2u}\,y - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right).$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática se obtiene la solución y de la cuártica, en la que aparecerán solamente raíces cúbicas y cuadradas.

La solución de Ferrari dependía por tanto de resolver previamente la ecuación resolvente, una cúbica, mediante la fórmula de Tartaglia, y esta se hallaba protegida por el juramento que su maestro Cardano le había hecho. Sin saber muy bien qué hacer, Cardano viajó a Bolonia para pedir consejo al yerno de Del Ferro, el primer matemático que había descubierto la solución de la cúbica. Allí, en unos viejos cuadernos que habían pertenecido a Del Ferro,

Cardano encontró la solución para la cúbica en una forma esencialmente equivalente a la que le había confiado Tartaglia. Al disponer de una fuente independiente, Cardano se sintió liberado de su juramento y publicó las soluciones de la cúbica y la cuártica en su obra *Ars magna* (1545), concediendo el debido crédito a Tartaglia, Del Ferro y Ferrari. Sin embargo, Tartaglia enfureció al ver publicada su fórmula y lo consideró una traición por parte de Cardano. En una de las polémicas más agrias de la historia de las matemáticas, Cardano y Tartaglia se cruzaron reproches y acusaciones mutuas y la disputa desembocó en un desafío público. Ferrari ocupó el lugar de su maestro Cardano en el combate matemático. Ante un ambiente hostil y agresivo, y viéndose con pocas posibilidades de superar al talentoso Ferrari, Tartaglia abandonó la ciudad después del primer día, hundiendo su reputación y con ella sus esperanzas de un futuro mejor.

EN BUSCA DE UNA SOLUCIÓN RADICAL

Una vez resueltas las ecuaciones hasta el cuarto grado por los matemáticos del Renacimiento italiano, la ecuación de grado cinco estaba en el punto de mira de la comunidad matemática, aguardando el nuevo ingenioso truco que permitiese resolverla reduciéndola de alguna manera a una ecuación de grado inferior. Sin embargo, a pesar de todos los esfuerzos, el problema estaba en un punto muerto. El objetivo era encontrar una fórmula para las soluciones a partir de los coeficientes, capaz de involucrar solamente un número finito de operaciones aritméticas (sumas, restas, productos y divisiones) y extracciones de raíces, pero esta fórmula estaba resultando tremendamente elusiva y ya en 1799 el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) opinó que era imposible, aunque, como era habitual en él, sin dar ninguna pista o indicación. En palabras de Abel, «Gauss es como el zorro, que con su cola borra sus huellas en la arena».

Mientras tanto, una nueva clase numérica se había ido ganando poco a poco el respeto de los matemáticos: los números com-

plejos, formados por un número real y otro de tipo imaginario. Cualquier número real multiplicado por sí mismo es positivo, por tanto la ecuación $x^2=-1$ no tiene solución si x es un número real. En general en la fórmula que resuelve la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ donde a es un valor diferente de cero, aparece la raíz cuadrada del discriminante b^2-4ac, y cuando esta cantidad es negativa, la ecuación no tiene soluciones reales.

Un fenómeno más inquietante surgió de la fórmula para resolver la cúbica: como Cardano observó en su libro, al aplicar la fórmula a la ecuación $y^3-15y-4=0$ se obtiene $y=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, que carece de sentido por aparecer en la expresión la raíz cuadrada de un número negativo. Sin embargo, es fácil comprobar que la ecuación tiene una solución perfectamente válida, $y=4$. Ambos resultados pueden congraciarse si uno aplica manipulaciones formales a la fórmula que proporciona la solución: se define $i=\sqrt{-1}$, es decir, se supone que i es un nuevo tipo de número que cumple la ecuación $i^2=-1$. Como i no era un número real, fue llamado «unidad imaginaria» y se combinó con los números reales para formar los números complejos $a+bi$, que se manipulan siguiendo las reglas usuales del álgebra y teniendo en cuenta que $i^2=-1$, tal y como se ha visto en el capítulo anterior.

Alrededor de 1560, el matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572) comprobó que

$$(2+i)^3=8+12i+6i^2+i^3=8+12i-6-i=$$
$$=2+11i=2+11\sqrt{-1}=2+\sqrt{-121}$$

y, de igual manera, $(2-i)^3=2-\sqrt{-121}$, con lo cual $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+i$ y $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-i$. Así, la solución de la cúbica que había sorprendido a Cardano era $y=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=(2+i)+(2-i)=4$, con lo que se obtenía la solución real conocida. Esto no podía ser casualidad, pero los matemáticos no entendían los números complejos y no se encontraron a gusto con ellos hasta que pudieron darles una interpretación geométrica: al igual que los números reales se disponen de manera geométrica sobre una recta —la recta real— los complejos se ubican en un plano —el plano complejo—, de forma que los números reales ocupan el eje de abscisas, y los imaginarios puros, el de ordenadas. Lo que esto significa, en esencia, es que es posible construir un modelo «real» para estos «números imaginarios» simplemente si se definen de forma apropiada las operaciones de suma y multiplicación para los puntos del plano. De este modo, la unidad imaginaria i se identificaría con el punto $(0, 1)$ del plano, y cada número complejo $a+bi$ se correspondería con un punto (a, b), tal como muestra la figura 1. Así, interpretados de manera adecuada, los puntos del plano se corresponden con estas cantidades imaginarias, que pierden de esta forma su carácter irreal, para convertirse *de facto* en objetos matemáticos tan aceptables como los mismísimos números reales.

Además, interpretado como un punto del plano, el número complejo $z=a+bi$ puede describirse (figura 1) mediante su distancia al origen $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ —llamada «módulo»— y el ángulo θ —llamado «argumento»— que forma con el semieje de abscisas positivo en sentido antihorario, comprendido entre los valores $-\pi$ y π y medido en radianes, usando la fórmula

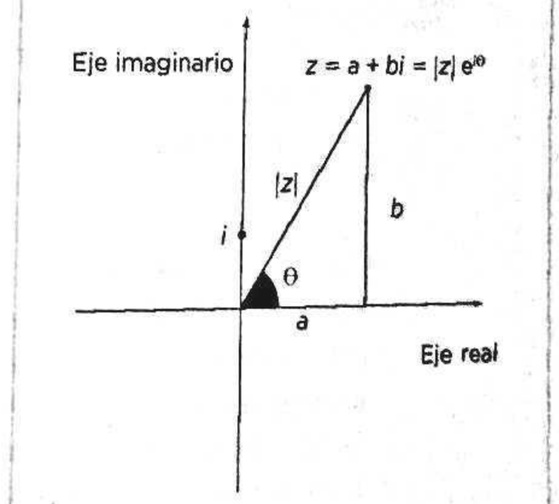
$$z=|z|(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)=|z|\,e^{i\theta}.$$

Representación en el plano complejo de un número z con parte real y parte imaginaria.

De esta forma, la suma y el producto de dos números complejos adquirieron también interpretaciones geométricas claras: los números complejos se suman según la ley del paralelogramo y se multiplican como el producto de sus módulos y la suma de sus argumentos. Por ejemplo, sea $z=i$, entonces $|z|=1$ y $\theta=\pi/2$, de manera que multiplicar por i consiste en hacer una rotación de $\pi/2$ radianes, es decir 90°, en sentido antihorario.

La descripción geométrica de los números complejos, debida al matemático francés Jean-Robert Argand (1768-1822), al noruego-danés Caspar Wessel (1745-1818) y a Gauss,

FIG. 1



permitió asentarlos con base firme y que dejaran de verse como meros artificios. Pero ahora una nueva cuestión ocupaba el centro de la investigación matemática. La unidad imaginaria se había introducido para resolver la ecuación $x^2=-1$ y, combinada con los números reales para formar los números complejos, ciertamente permitía resolver cualquier ecuación cuadrática. Sin embargo, ¿cualquier ecuación algebraica admitía una solución compleja?, ¿o tal vez habría que introducir nuevas clases de números para resolver otras ecuaciones más complicadas que las cuadráticas?

El conocido filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650) afirmó en 1637 que cualquier ecuación de grado n tenía exactamente n raíces, resultado que llegó a ser conocido como «teorema fundamental del álgebra», y cuya primera demostración universalmente aceptada apareció en la tesis doctoral de Gauss en 1799. Más adelante Gauss presentaría otras tres pruebas diferentes, para dejar constancia de la gran importancia que daba a este resultado. En concreto, el teorema citado afirma que si $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\ldots+a_1z+a_0$ es un polinomio de grado n igual o mayor que uno con coeficientes a_i complejos, entonces existe un número complejo α_1 (llamado raíz del polinomio) tal que $p(\alpha_1)=0$, esto es, si se sustituye la incógnita z por a_1 en el polinomio p el resultado será cero. Por el algoritmo de la división se sabe que α_1 es una raíz del polinomio $p(z)$ si y solo si $p(z)=(z-\alpha_1)q(z)$, siendo $q(z)$ un polinomio de grado $n-1$ al que podría aplicarse de nuevo el teorema. Procediendo inductivamente se llega a que existen n números complejos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (no necesariamente distintos) tales que $p(z)=(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)$.

Esta factorización, equivalente al teorema fundamental del álgebra, muestra que cualquier polinomio de grado $n\geq 1$ tiene como máximo n raíces, y si llamamos $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ a las raíces diferentes que aparecen con multiplicidad (número de veces que se muestran) $m_1, m_2, \ldots, m_r$, respectivamente, se cumple que

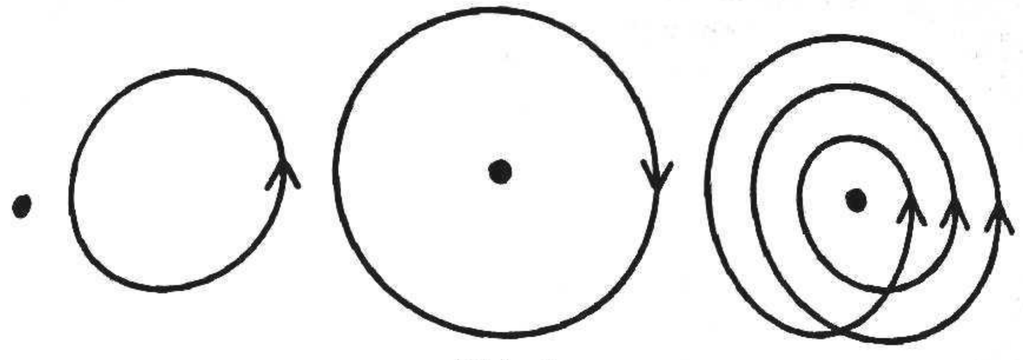
$$p(z)=a_n(z-\beta_1)^{m_1}(z-\beta_2)^{m_2}\ldots(z-\beta_r)^{m_r},\ m_1+m_2+\ldots+m_r=n,$$

UNA DEMOSTRACIÓN TOPOLÓGICA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Gauss probó que todo polinomio de grado $n\geq 1$ se anula en algún punto, resultado que recibió el nombre de «teorema fundamental del álgebra». La siguiente demostración está basada en una idea topológica sencilla pero muy poderosa, el «número de vueltas»: si $\gamma(\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$ (es decir, si la función γ depende de un ángulo θ tal que puede tomar un valor comprendido entre 0 y 2π) es una curva cerrada en el plano que no pasa por el origen y $\phi_{\gamma(\theta)}$ es una elección continua del argumento (esto es, el ángulo) de γ, entonces el *número de vueltas* que da γ alrededor del origen es

$$w(\gamma)=\frac{\phi_{\gamma(2\pi)}-\phi_{\gamma(0)}}{2\pi}.$$

Por ejemplo, si $\gamma(\theta)=(x_0,y_0)\neq(0,0)$ es constante, entonces $\phi_{\gamma(2\pi)}=\phi_{\gamma(0)}$, y, por tanto, $w(\gamma)=0$. Por otro lado, si $\gamma(\theta)=e^{n\theta i}$ entonces se puede tomar $\phi_{\gamma(\theta)}=n\theta$ y así $w(\gamma)=n$. La principal propiedad del número de vueltas es que permanece invariante por homotopía, es decir, si la curva $\gamma_0(\theta)$ es deformada de forma continua en otra curva $\gamma_1(\theta)$ sin pasar en ningún momento por el origen entonces $w(\gamma_0)=w(\gamma_1)$.



La demostración del teorema
A partir de un polinomio con coeficientes complejos $p(z)$ de grado $n\geq 1$ y sin ninguna raíz es posible deformar continuamente una curva constante $\gamma_0(\theta)$ en la curva $\gamma_1(\theta)=e^{n\theta i}$ y llegar así a la contradicción $0=w(\gamma_0)=w(\gamma_1)=n\geq 1$. Esto prueba que todo polinomio complejo $p(z)$ de grado $n\geq 1$ debe tener alguna raíz, que es precisamente el enunciado del teorema fundamental del álgebra.

y por tanto un polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces, cada una con su multiplicidad, tal y como Descartes había conjeturado. También a partir de la factorización del polinomio $p(z)=z^n+a_{n-1}\,z^{n-1}+a_{n-2}\,z^{n-2}+\ldots+a_1\,z+a_0$ con raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se deduce con facilidad que

$$a_0=(-1)^n\,\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n,$$

$$a_1=(-1)^{n-1}(\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_n),$$
$$\ldots$$
$$a_{n-2}=\alpha_1\,\alpha_2+\alpha_1\,\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\,\alpha_n,$$

$$a_{n-1}=-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n).$$

Estas fórmulas, que relacionan los coeficientes del polinomio con sus raíces, eran ya conocidas desde la época de Cardano y reciben el nombre de «funciones simétricas elementales»: simétricas porque no cambian si se intercambia el orden de las raíces, y elementales porque, como demostraron el físico, matemático y filósofo Isaac Newton y el matemático británico Edward Waring (1734-1798), son los bloques básicos de los que depende racionalmente cualquier otra función simétrica de las raíces.

Sin embargo, el teorema fundamental del álgebra es solo un teorema de existencia: afirma que las raíces existen pero no proporciona una fórmula para calcularlas, por lo que el problema de resolver la quíntica por radicales permanecía inexpugnable. El propio Gauss realizó algún avance al probar que las raíces enésimas de la unidad, es decir, las soluciones de la ecuación $z^n = 1$, eran expresables mediante radicales para todo valor de n. Este no era un resultado evidente puesto que la fórmula habitual para describir las raíces de la unidad

$$z_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n},\ k = 1,2,\ldots,n$$

usa funciones trigonométricas que no son admisibles en una solución algebraica.

En cuanto a la resolución de la ecuación general de grado mayor o igual a cinco, el matemático suizo Leonhard Euler había publicado en 1738 sus propias soluciones a las ecuaciones de grado inferior en las que demostraba que la solución de la ecuación de grado dos podía escribirse como $\sqrt{A}$, la de grado tres como $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ y la de grado cuatro como $\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}+\sqrt[4]{C}$, siendo A, B, C soluciones de una «ecuación resolvente» de grado inferior. Conjeturó que también existía una ecuación resolvente para las ecuaciones de grado cinco y superior y que, por ejemplo, la quíntica podría resolverse mediante una expresión de la forma $\sqrt[5]{A}+\sqrt[5]{B}+\sqrt[5]{C}+\sqrt[5]{D}$, pero no pudo probar este resultado.

Alexandre T. Vandermonde (1735-1796), matemático, musicólogo y político francés, intentó en 1770 un enfoque alternativo tratando de construir fórmulas que produjesen las raíces a partir de las funciones simétricas elementales, lo cual funcionó para los casos conocidos, pero al llegar a la ecuación de grado cinco se vio llevado a una ecuación resolvente de grado seis, lo que le impidió seguir avanzando en el problema.

«Si uno quiere progresar en matemáticas, debe estudiar a los maestros y no a los discípulos.»

— Niels Henrik Abel

Sin duda, la persona que más influyó en el trabajo de los matemáticos posteriores que se ocuparon de la teoría de ecuaciones, incluido Abel, fue Joseph-Louis Lagrange, quien, entre 1770 y 1771, publicó *Reflexiones sobre la resolución algebraica de las ecuaciones*. Lagrange analizó las soluciones conocidas a las ecuaciones de grado menor o igual a cuatro tratando de buscar un patrón que pudiera ser generalizado a las de grado superior. La principal novedad que introdujo fue el estudio del número de valores que toma una función cuando sus argumentos son permutados, investigación que continuó el matemático francés Cauchy y que sería un ingrediente fundamental en la prueba de Abel. En el trabajo de Lagrange aparece sin duda la primera aplicación de la teoría de grupos a la teoría de ecuaciones que cul-

LAGRANGE Y LA TEORÍA DE GRUPOS

En los trabajos de matemáticos como Joseph-Louis Lagrange, Augustin-Louis Cauchy, Abel y Évariste Galois surgieron los rudimentos que luego cristalizarían en el concepto abstracto de grupo. Un grupo G es simplemente un conjunto dotado de una operación interna $*$: $G\times G\to G$ que a dos elementos $a,b\in G$ les asigna otro elemento $a*b\in G$ y que cumple las siguientes propiedades o axiomas:

- Asociatividad: $(a*b)*c=a*(b*c)$, para cualesquiera $a,b,c\in G$, es decir, al operar con tres elementos no importa cómo se asocien dos de ellos.
- Existencia de elemento neutro: Existe $e\in G$ tal que $a*e=e*a=a$ para cualquier $a\in G$, es decir, cualquier elemento operado con el neutro permanece inalterado.
- Existencia de inverso: Para cualquier $a\in G$ existe otro elemento denotado como $a^{-1}\in G$ tal que $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$, es decir, todo elemento operado con su inverso produce el neutro.

Si además en G se cumple esta otra propiedad,

- Conmutatividad: $a*b=b*a$ para cualquier $a,b\in G$, es decir, no importa el orden en el que se operan dos elementos, entonces se dice que es un grupo conmutativo o abeliano (en homenaje a Abel). Un subconjunto $F\subseteq G$ se dice que es un subgrupo si la restricción de la operación $*$ a F lo convierte en un grupo. Cualquier grupo G posee siempre dos subgrupos triviales: $F=\{e\}$ y $F=G$, es decir, el subconjunto formado por el elemento neutro y él mismo Un conjunto $F\subseteq G$ es un subgrupo si y solo si dados $a,b\in F$ entonces $a*b^{-1}\in F$.

El orden de un grupo

Si G es un grupo finito, se llama orden de G a su número de elementos. El teorema de Lagrange afirma que en todo grupo finito el orden de cualquiera de sus subgrupos es siempre un divisor del orden del grupo. En particular, si el orden de G es un número primo entonces los únicos subgrupos de G son los triviales.

Joseph-Louis Lagrange

minaría espectacularmente con la obra del francés Évariste Galois (1811-1832).

Una permutación de un conjunto finito es simplemente una reordenación de sus elementos, como cuando se barajan las cartas. Si se identifica el conjunto con los n primeros números naturales $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, una permutación es cualquier ordenación de los mismos, como $\{2, 1, 3, \ldots, n\}$ donde lo que se ha hecho es intercambiar el 1 con el 2 y dejar los demás números en su sitio. Para la primera posición podemos elegir entre n números, una vez colocado el primero, y como los números no pueden repetirse, podemos escoger $n-1$ números para el segundo lugar, $n-2$ para el tercero, y así sucesivamente hasta llegar a la última posición, para la que hay una única posibilidad. Es decir, en total existen $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ ordenaciones distintas o permutaciones de n elementos.

Si se considera, por ejemplo, la función de tres variables $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$, se satisface que, para cualquier permutación de dichas variables, la función no cambia, es decir, toma únicamente un valor, por lo que se puede afirmar que es simétrica. Por otro lado, la función $f(x_1,x_2,x_3)=(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)\,(x_2-x_1)$ da solo dos valores, $f(x_1,x_2,x_3)$ o $-f(x_1,x_2,x_3)$, cuando se realiza cualquiera de las seis posibles permutaciones de las variables. Lagrange probó que si $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es una función racional —es decir, expresable en forma de cociente de polinomios— que toma los valores distintos $f_1,f_2,\ldots,f_r$, al permutar sus variables, entonces r es un divisor de $n!$ Además, los coeficientes $A_0,A_1,\ldots,A_{r-1}$ del polinomio construido a partir de los valores $f_1,f_2,\ldots,f_r$ como

$$p(z)=(z-f_1)(z-f_2)\ldots(z-f_r)=z^r+A_{r-1}z^{r-1}+A_{r-2}z^{r-2}+\ldots+A_1z+A_0,$$

son funciones simétricas de $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

En particular, una función racional de tres variables podría tomar 1, 2, 3 o 6 valores diferentes (los divisores de $3!=3\cdot 2\cdot 1=6$), pero nunca 4 o 5. Este tipo de argumento sería fundamental en la prueba de Abel.

En 1799, siguiendo la senda iniciada por Lagrange, el matemático y médico italiano Paolo Ruffini (1765-1822) publicó la prueba

que demostraba por primera vez la imposibilidad de resolver la quíntica por radicales. Sin embargo, la comprobación era muy larga y complicada, pues ocupaba cerca de quinientas páginas, y no recibió demasiada atención por parte de la comunidad matemática. Ruffini se esforzó en obtener la opinión de Lagrange, a quien tenía en la mayor estima, pero este apenas le prestó atención. Entre quienes tuvieron la paciencia y el interés en leer con detalle su demostración pronto surgieron críticas a ciertas suposiciones no comprobadas. Como consecuencia, Ruffini publicó varias versiones diferentes de su prueba a lo largo de veinte años, pero la opinión generalizada era que se encontraba incompleta y que la primera demostración esencialmente correcta fue la de Abel. Entre los matemáticos de renombre solo Cauchy —poco dado, por otro lado, a elogiar la obra de otros— alabó a Ruffini e, inspirado por él, publicó una influyente memoria sobre los valores que una función podía tomar cuando se permutaban sus argumentos, resultado que sería fundamental para Abel. En particular, Cauchy generalizó el resultado de Ruffini —según el cual una función de cinco variables no podía tener exactamente tres o cuatro valores cuando se permutaban sus argumentos— probando que «el número de valores que toma una función no simétrica de n cantidades cuando sus variables se permutan de todas las maneras posibles no puede ser menor que el mayor primo p menor que n sin ser igual a dos».

LA DEMOSTRACIÓN DE ABEL

El padre de Abel fue elegido, a finales de 1817, miembro del Storting (Parlamento noruego), pero apenas unos meses después cayó en desgracia al acusar falsamente a dos representantes en una sesión. El fin de su carrera política y sus problemas con el alcohol deterioraron seriamente su salud y lo llevaron a la muerte en 1820. Abel, su madre y sus cinco hermanos quedaron en una situación económica muy precaria, y fue su mentor Holmboe quien consiguió apoyo económico para que Abel pudiera acabar el colegio y empezar sus estudios en la Universidad de Cristianía (actual Oslo)

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Niccolò Fontana (1499-1557), conocido como *Tartaglia*, fue el creador de un método para resolver ecuaciones de tercer grado.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Gerolamo Cardano (1501-1576), matemático que se obsesionó con el método de resolución de las ecuaciones cúbicas de Tartaglia, hasta el punto de que le tendió una trampa para que le confesase la fórmula.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
Retrato del filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650), pintado por el pintor neerlandés Frans Hals.

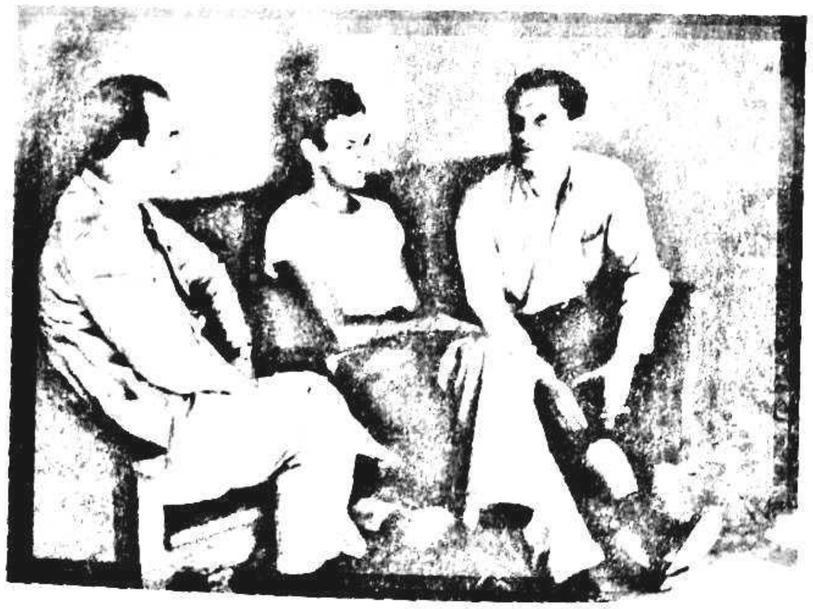
FOTO INFERIOR DERECHA:
Niles Henrik Abel (1802-1829) retratado por el pintor noruego Johan Gørbitz en 1826, durante su estancia en París.

EL DILEMA DE ULAM

El *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, en cuyo primer número, en 1826, aparecieron hasta seis artículos de Abel, fue la la primera revista de matemáticas de Alemania no controlada por ninguna academia. Poco a poco fueron apareciendo en Europa unas cuantas publicaciones especializadas similares a esta, en las que los matemáticos presentaban sus principales hallazgos. Por tanto, para estar al corriente de las novedades en la disciplina bastaba con acudir a la biblioteca y leer este puñado de revistas. En la actualidad la situación es mucho más complicada. Se conoce como «dilema de Ulam» al problema planteado por el matemático polaco Stanislaw Ulam (1909-1984) en su autobiografía *Aventuras de un matemático*:

> Hace algunos años, durante una conferencia que pronuncié en Princeton en los actos de celebración del vigesimoquinto aniversario de la computadora de Von Neumann, de repente me puse a estimar mentalmente cuántos teoremas se publican al año en las revistas de matemáticas. Hice un rápido cálculo mental y llegué a una cifra de cien mil teoremas al año... Si el número de teoremas es mucho mayor de lo que es humanamente posible examinar, ¿en quién fiarse para juzgar qué es importante?

Si el dilema de Ulam planteaba una pregunta de difícil respuesta en 1976, año de publicación de su libro, una solución es hoy en día todavía más acuciante, debido al crecimiento exponencial del número de revistas y de las facilidades que proporciona Internet a la hora de difundir y publicar el trabajo de los matemáticos de todo el mundo.



Stanislaw Ulam (derecha) con Richard Feynman (centro) y John von Neumann, cerca de Los Álamos hacia 1949.

en 1821. Con solo diecinueve años, Abel presentó a Holmboe una fórmula para resolver la ecuación de grado cinco por radicales. En la aislada Noruega, Abel no había tenido noticias de los trabajos de Ruffini sobre la imposibilidad de resolver la quíntica, y por tanto sus esfuerzos continuaban, en la tradición de Euler y Lagrange, centrados en buscar una fórmula que proporcionase las soluciones. Como Holmboe no fue capaz de determinar la validez del argumento de Abel, decidieron enviárselo a Ferdinand Degen, el mejor matemático danés de la época. Degen respondió de manera amable pidiendo ejemplos numéricos. Precisamente fue buscando estos ejemplos como Abel se dio cuenta de un error en su fórmula. Y lo que resulta no menos importante, Degen le proporcionó un consejo que tendría grandes consecuencias en la orientación de su trabajo: «Me refiero a las integrales elípticas. Un investigador serio con capacidades adecuadas para una investigación de este tipo no se restringiría solo a las muchas bellas propiedades de estas notables funciones, sino que podría descubrir un estrecho de Magallanes que condujese a las vastas extensiones de un tremendo océano analítico».

Abel obtuvo una pequeña ayuda para visitar a Degen y a otros matemáticos daneses en Copenhague. Lo más reseñable de este viaje fue que en su transcurso conoció a Christine, *Crelly*, Kemp, quien se convertiría en su prometida.

A su vuelta a Cristianía continuó trabajando en la ecuación de quinto grado. Tratando de enmendar su error, Abel empezó a cambiar de parecer y pensó que la fórmula que buscaba no existía. Por otro lado, sus profesores y amigos noruegos, el astrónomo y físico Christopher Hansteen y el matemático Søren Rasmussen eran conscientes de que un genio de la talla de Abel necesitaba entrar en contacto con los grandes matemáticos europeos para desarrollar todo su potencial. Por ello, consiguieron del gobierno noruego una beca de viaje para Abel. Esgrimieron el argumento de que «una estancia en el extranjero, en los lugares donde se encontraban los matemáticos más sobresalientes, contribuiría de forma excelente a su educación científica y erudita».

En 1824 Abel había conseguido probar la imposibilidad de resolver la quíntica mediante radicales y decidió publicar la de-

mostración pagando al impresor de su bolsillo para tener una buena carta de presentación ante los matemáticos europeos a los que iba a conocer en su inminente viaje. Como solo pudo permitirse un breve panfleto de seis páginas, su primera demostración publicada fue poco clara y parca en detalles. La envió a Gauss, esperando reconocimiento del gran matemático alemán, pero parece que este ni siquiera llegó a abrir el sobre. La idea inicial de Abel de visitar a Gauss en Gotinga se truncó ante la falta de interés de este último y así ambos genios no llegaron a conocerse en persona. En Berlín, sin embargo, sí consiguió impresionar a August Leopold Crelle, fundador del *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, primera revista matemática alemana no controlada por ninguna academia, que en su primer número, en 1826, publicó una versión ampliada del panfleto de Abel. Al no tener que pagar por la publicación, pudo elaborar mejor la demostración y aportar más detalles. Este artículo y un resumen del mismo que Abel escribió en francés para la revista del barón de Ferrusac (1786-1836) dieron a conocer al mundo al talentoso joven noruego que afirmaba haber demostrado la imposibilidad de resolver la quíntica por radicales. A diferencia de lo que sucedió con Ruffini, esta vez la comunidad matemática fue receptiva con las ideas de Abel y le dio crédito por desentrañar el misterio de esta ecuación.

La demostración de imposibilidad de Abel es una pieza de orfebrería matemática y procede por «reducción al absurdo»: supone que existe una fórmula algebraica que proporciona las soluciones a partir de los coeficientes de la ecuación general de grado cinco y sigue de manera laboriosa con una cadena de deducciones hasta llegar a una contradicción, probando que la existencia de tal fórmula es imposible. Como escribió el famoso matemático de Cambridge Godfrey H. Hardy (1877-1947), «*Reductio ad absurdum*, que Euclides tanto amaba, es una de las mejores armas del matemático. Es un gambito mucho más fino que cualquiera del ajedrez: un jugador de ajedrez puede ofrecer el sacrificio de un peón o incluso una pieza, pero un matemático ofrece la partida».

Abel empezó suponiendo que la ecuación de grado cinco

$$x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

admitía una solución por radicales, es decir, supuso que existía una fórmula que combinando los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_4$ mediante un número finito de sumas, restas, productos, divisiones y extracción de raíces proporcionaba las soluciones. Su primer paso, explicado en detalle en su artículo de 1826 —y no así en su panfleto de 1824— consistió en probar que cualquier solución por radicales podía escribirse como

$$x = g_0 + \sqrt[m]{R} + g_2 \sqrt[m]{R^2} + g_3 \sqrt[m]{R^3} + \ldots + g_{m-1} \sqrt[m]{R^{m-1}},$$

siendo m un número primo y $R, g_0, g_2, \ldots, g_{m-1}$ expresiones que podían descomponerse de la misma forma que x y así sucesivamente hasta llegar finalmente a funciones racionales de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_4$. Además, $\sqrt[m]{R}$ no se podía expresar como una función racional de los coeficientes y de $g_0, g_2, \ldots, g_{m-1}$. Así, en la expresión de la solución aparecían distintas raíces anidadas (raíces dentro de raíces) hasta llegar en el nivel más interior a funciones racionales (sin raíces).

Por ejemplo, la solución de la cúbica reducida $y^3 + py + q = 0$ es, según la fórmula de Del Ferro-Tartaglia-Cardano-Ferrari vista anteriormente,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

pero también admite la expresión equivalente $y = \sqrt[3]{R} + g_2 \sqrt[3]{R^2}$, siendo

$$R = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ y } g_2 = \frac{9\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}{p^2},$$

que es de la forma descrita por Abel.

A continuación Abel dedujo de manera brillante que $g_0, g_2, \ldots, g_{m-1}$ y $\sqrt[m]{R}$ son funciones racionales de las raíces de la quíntica. Así, $\sqrt[m]{R}$, que es necesariamente una función irracional de los coeficientes de la ecuación, ¡es sin embargo una función racional de las raíces! Esta propiedad, fundamental para la prueba de Abel, había sido

utilizada por Ruffini en su memoria de 1799 pero sin haberla demostrado. Su comprobación justifica la reputación de Abel como el primero en resolver completamente el misterio de la quíntica. Por ejemplo, si se considera que las raíces de la ecuación cuadrática $x^2+bx+c=0$ son

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} \text{ y } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2},$$

se comprueba con facilidad que $\sqrt{b^2-4c} = x_1 - x_2$ y por tanto la función $\sqrt{b^2-4c}$, que es irracional en los coeficientes b y c, es por el contrario racional en las raíces x_1 y x_2, en concordancia con el resultado general de Abel.

Aplicando un razonamiento análogo, Abel concluyó que cualquier radical que apareciese en la solución x debía ser una función racional de las raíces. Llegado a este punto, el matemático ya estaba preparado para usar el teorema de Cauchy sobre el número de valores que toma una función racional cuando se permutan sus valores, para llegar a una contradicción y demostrar así que la solución por radicales no podía existir.

En efecto, Abel prestó atención ahora a los radicales del nivel más interior, es decir, aquellos de la forma $\sqrt[n]{R}$ donde R es una función racional de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_4$ de la ecuación de grado cinco (es decir, R está libre de raíces) y n es un número primo. Como los coeficientes son las funciones simétricas elementales de las raíces, se cumple entonces que R también es una función simétrica de las raíces y, por su parte, Abel había demostrado que $\sqrt[n]{R} = r(x_1, x_2, \ldots, x_5)$ era una función racional de las raíces de la quíntica $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Al permutar las cinco variables de r se obtiene un único valor de R, porque R es simétrica, y por tanto $\sqrt[n]{R}$ toma los n valores distintos de la raíz n-ésima. Al ser n primo, Abel invocó en este punto el teorema de Lagrange para garantizar que $n=2,3$ o 5 —puesto que n divide a $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ y n es primo— y el teorema de Cauchy para establecer que entonces $n=5$ o $n=2$, al no ser posible el caso $n=3$. En particular, esto significa que la raíz situada en el nivel más interior de la expresión debía ser una raíz quinta o una raíz cuadrada. Solo faltaba por tanto analizar cada caso por separado y descartarlo si se llegaba a una contradicción.

El caso $n=5$ es el más sencillo de excluir porque a partir de la ecuación probada previamente por Abel

$$\sqrt[5]{R} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \ldots + \alpha x_5),$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_5$ son las raíces de la quíntica y α es una raíz quinta de la unidad distinta de uno, se sigue que el miembro de la izquierda toma cinco valores distintos al permutar las raíces, mientras que el miembro de la derecha cambia su valor con cada permutación y toma entonces $5! = 120$ valores. Por tanto es imposible que ambas expresiones sean iguales, y la única posibilidad que queda es $n=2$.

«¡Qué cabeza tiene este joven noruego!»

— Adrien-Marie Legendre

Para descartar el caso $n=2$ Abel tuvo que trabajar más duro, probando que en ese caso se cumplía la ecuación

$$\frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \ldots + \alpha x_5) = \sqrt[5]{h_0 + h_1\sqrt{S}},$$

donde h_0, h_1 y S eran funciones simétricas de las raíces. Así, al permutar las cinco raíces de todas las formas posibles, el miembro de la izquierda tomaba $5! = 120$ valores pero el miembro de la derecha solo 10, al tener la raíz cuadrada dos valores posibles y multiplicarlos por los cinco admisibles de cada raíz quinta. Abel llegó de tal manera a una contradicción que implicaba que la premisa inicial era falsa: no existía solución por radicales para la ecuación general de grado cinco.

Esto implicaba que la ecuación general de grado $n \geq 5$ tampoco era resoluble por radicales (si se multiplica la ecuación general de grado cinco por x^{n-5}, se obtiene una ecuación de grado $n \geq 5$ que no puede resolverse por radicales), poniendo así fin a un problema largamente estudiado: solo era posible resolver de forma general mediante fórmulas algebraicas los casos $n=2$, $n=3$ y $n=4$ ya conocidos. Pero cuando un problema se cierra, de inmediato surge otro de interés igual o mayor.

UNA SOLUCIÓN A LO IRRESOLUBLE

A pesar de su espectacularidad, el resultado de Abel de 1824, y su versión ampliada de 1826, probaban solamente que no existía una fórmula para resolver mediante radicales la ecuación general de quinto grado $x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$. Sin embargo, eso no implicaba que una ecuación particular como $x^5-6x^2+3=0$ no pudiese ser resuelta con este método. De hecho, se sabía que ciertas ecuaciones como $x^n-1=0$ sí eran resolubles por radicales para cualquier número natural n. Peor aún, el hallazgo de Abel ni siquiera implicaba que existiese alguna ecuación «particular» que no pudiese ser resuelta por radicales. Tal vez siempre hubiese una fórmula válida, pero distinta para cada ecuación particular, de manera que no existiese una misma expresión para resolverlas todas.

Abel estaba fascinado por la teoría de las ecuaciones y, consciente de las limitaciones de su teorema de imposibilidad, comenzó a estudiar condiciones que garantizasen que una ecuación particular fuese resoluble por radicales. Este trabajo cristalizó en su «Memoria sobre una clase de ecuaciones resolubles algebraicamente», escrita en 1828 y publicada en *Crelle* en 1829, poco antes de su muerte. El principal resultado de Abel en esta memoria garantizaba que una ecuación de grado n con raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ era resoluble por radicales si todas las raíces eran expresables como funciones racionales a partir de una sola de ellas, es decir, $\alpha_i=R_i(\alpha_1)$ siendo R_i una función racional, y además para cada par i y j se cumplía que

$$R_i(R_j(\alpha_1))=R_j(R_i(\alpha_1)).$$

Esta última ecuación era una condición de conmutatividad (no importa el orden en el que se apliquen las funciones) y justifica que el término «abeliano» se utilice en la teoría de grupos como sinónimo de «conmutativo».

Abel no publicó más trabajos en vida sobre la teoría de ecuaciones, pero en su correspondencia con Crelle y Holmboe anunció numerosos resultados sobre el tema. La información contenida en

ÉVARISTE GALOIS

Évariste Galois nació cerca de París en 1811, hijo de padre republicano. Después de ser educado doce años en casa por su madre, en 1823 entró en el Liceo de Louis-le-Grand, donde se despertó su interés por las matemáticas y se forjó su espíritu revolucionario. Galois intentó por dos veces acceder a la Escuela Politécnica, la universidad más prestigiosa de Francia y conocida por el activismo político de sus estudiantes. Siguiendo el ejemplo de su padre, se había convertido en un ardiente republicano, pero su negativa a responder a ciertas preguntas del tribunal que lo examinaba, por considerarlas obvias, y su menosprecio al mismo (la leyenda dice que tiró un borrador a uno de los miembros del tribunal) lo llevaron al fracaso. Galois, resignado, entró en la Escuela Normal en 1830, considerada mucho menos interesante desde el punto de vista científico y mucho más conservadora en lo político. Galois se inició en la investigación matemática en 1829 con un artículo publicado sobre fracciones continuas y varios artículos sobre la resolución algebraica de las ecuaciones. Después de conocer el trabajo en ecuaciones de Abel, presentó a la Academia de París una memoria sobre las condiciones para que una ecuación fuese resoluble algebraicamente. Esta fue enviada a Jean-Baptiste Joseph Fourier, secretario de la Academia, para ser considerada para Grand Prix en matemáticas, pero Fourier murió dos meses más tarde y la memoria se perdió. Curiosamente, el Grand Prix de 1830 fue concedido a Abel (a título póstumo) y al alemán Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851).

Acontecimientos turbulentos

En julio de 1830 estalló una revolución en París y el rey Carlos X huyó de Francia. Galois fue expulsado de la Escuela Normal después de escribir una carta al director quejándose de que impedía a sus estudiantes sumarse a la revolución. Se unió entonces a la Artillería de la Guardia Nacional, una milicia republicana, que pronto sería abolida por el nuevo rey, Luis Felipe. Durante este período Galois ingresó dos veces en prisión. A finales de mayo de 1832 fue herido de muerte en un duelo cuyas causas nunca han sido aclaradas, pero que se supone relacionado con una mujer de la que se había enamorado. La noche antes del duelo, consciente de que su final era inminente, escribió frenéticamente todo lo que sabía sobre la resolución de ecuaciones por radicales. En 1846, Joseph Liouville publicó en su revista la solución completa de Galois.

estas cartas junto con un manuscrito inconcluso de 1828 fueron incluidos póstumamente en sus *Obras completas* con el título «Sobre la resolución algebraica de las ecuaciones». Abel se había propuesto un ambicioso objetivo: «Dada una ecuación de cualquier grado, determinar si podía o no ser resuelta por radicales». El matemático noruego expresó de manera clara su programa en la introducción del manuscrito: «De esto se siguen de forma natural dos problemas, cuya solución completa comprende toda la teoría de la solución algebraica de las ecuaciones:

— Encontrar todas las ecuaciones de un determinado grado que son resolubles algebraicamente.
— Decidir si una ecuación dada es o no algebraicamente resoluble».

Su prematura muerte le impidió alcanzar este objetivo y nunca publicó un criterio general para decidir cuándo una ecuación era resoluble desde un punto de vista algebraico. Sin embargo, en una carta a Crelle de 1828 le comunicó, sin demostración, la siguiente condición suficiente: «Si tres raíces cualesquiera de una ecuación irreducible de grado primo están relacionadas de tal forma que una de ellas puede ser expresada racionalmente por las otras dos, entonces la ecuación en cuestión será siempre resoluble por radicales». Se puede conjeturar hasta dónde habría llegado Abel en sus investigaciones de no haber muerto tan joven, pero lo cierto es que le correspondió a otro genio, Galois, cuya muerte fue aún más prematura, resolver completamente el misterio de la resolución por radicales.

Uno de los principales resultados de Galois completaba el criterio de Abel, diciendo que una ecuación irreducible de grado primo era resoluble por radicales si y solo si cada raíz podía ser expresada racionalmente a partir de otras dos raíces cualesquiera.

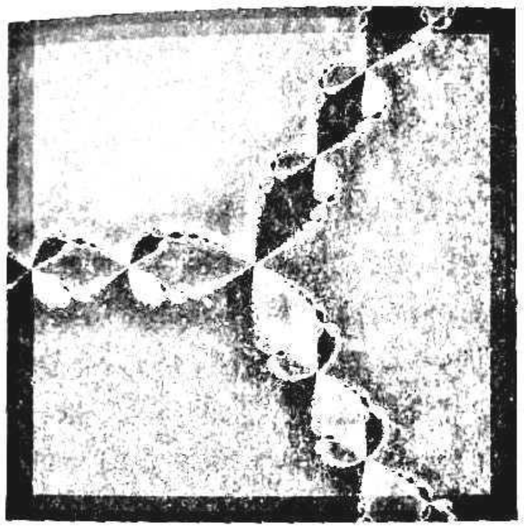
Como el matemático alemán Leopold Kronecker observó en 1856, del teorema de Galois se sigue que si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes racionales, irreducible y de grado primo, y la ecuación $f(x)=0$ es resoluble por radicales, entonces o bien $f(x)$ tiene exactamente una raíz real o bien todas sus raíces son reales (si

EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON Y LOS FRACTALES

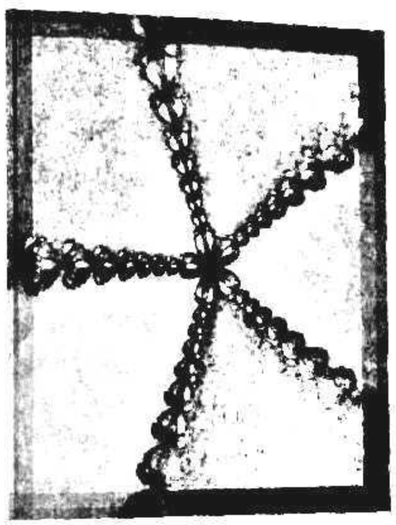
El método iterativo de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

puede aplicarse en el plano complejo para aproximar las raíces de un polinomio. Como el teorema fundamental del álgebra garantiza que un polinomio de grado n tiene n raíces complejas, es natural preguntarse a qué raíz convergerá el método empezando en un punto arbitrario x_0 del plano complejo. Si se pintan del mismo color todos los puntos que convergen a la misma raíz se obtiene la «cuenca de atracción» de dicha raíz. Podría pensarse, desde un punto de vista geométrico, que cada punto converge a la raíz más próxima, pero la situación se complica en el borde de estas regiones, dando lugar a complicadas y bellas figuras fractales. Los fractales, de acuerdo con el término acuñado por el matemático francopolaco Benoît Mandelbrot (1924-2010) en 1978, son objetos geométricos irregulares y autosemejantes, que repiten su estructura a distintas escalas.



Cuencas de atracción de $z^3-1=0$



Cuencas de atracción de $z^4-1=0$

tuviese al menos dos raíces reales entonces todas tendrían que ser reales pues dependen racionalmente de las dos primeras). Como consecuencia del resultado de Kronecker es fácil establecer que, por ejemplo, la ecuación $x^5-4x-2=0$ no es resoluble por radicales, ya que es irreducible, de grado primo y tiene exactamente tres raíces reales y dos complejas. De esta forma, la poderosa teoría

creada por Galois permitió encontrar por vez primera ecuaciones particulares que no eran resolubles por radicales, una tarea en la que Abel no había logrado el éxito.

MÁS ALLÁ DE LO IMPOSIBLE

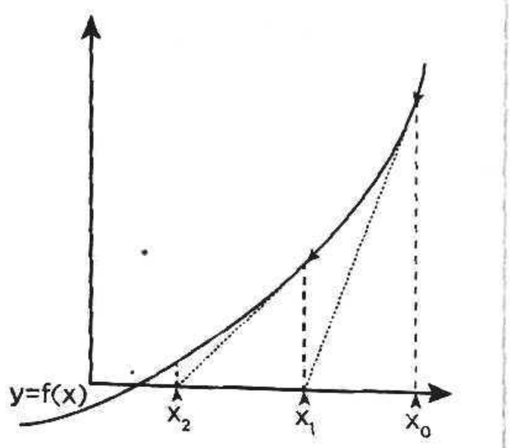
El teorema de Abel mostraba que la ecuación general de grado mayor o igual que cinco no podía ser resuelta por radicales. Galois fue un paso más allá y probó exactamente qué ecuaciones podían ser resueltas por radicales y cuáles no. Sin embargo, esta no es la única forma de solucionar una ecuación: por ejemplo, la cúbica $x^3-3x-1=0$ es resoluble por radicales mediante la fórmula de Del Ferro-Tartaglia-Cardano-Ferrari, pero también admite como resultado

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right),$$

que es una fórmula con una función trigonométrica en lugar de una expresión algebraica con radicales.

El hallazgo de Abel no impedía que la quíntica pudiese resolverse mediante fórmulas que usasen funciones trigonométricas u otras más complicadas. En efecto, el francés Charles Hermite (1822-1901), gran admirador del trabajo de Abel, probó que la quíntica podía ser solucionada usando funciones elípticas, la teoría a la que Abel hizo sus contribuciones más importantes, y el alemán Felix Klein (1849-1925) mostró la estrecha relación existente entre las ecuaciones de grado cinco, las funciones elípticas y las simetrías del icosaedro. Asimismo se sabe que la ecuación quíntica admite una solución alternativa usando radicales y «ultrarradicales», donde el ultrarradical del número a es una función especial que se define como la única solución real de la ecuación $x^5+x-a=0$.

FIG. 2



Además, en la actualidad ya no es tan importante disponer de fórmulas exactas porque el desarrollo de métodos numéricos rápidos, eficientes y fácilmente implementables en un ordenador permite obtener cualquier solución de una ecuación polinómica con el grado de aproximación deseado. Por ejemplo, uno de los métodos numéricos más conocidos para aproximar la solución de la ecuación $f(x)=0$ es el llamado «método de Newton-Raphson». También recibe el nombre de «método de las tangentes» (una recta tangente a una curva es una recta que pasa por un punto de la curva y, justo en este punto, tiene la misma pendiente que la curva) porque se parte de un valor aproximado inicial x_0, obtenido por tanteo, y se sustituye la función $f(x)$ por su recta tangente $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, utilizando el punto de corte de la tangente con el eje de abscisas —es decir, la solución de la ecuación $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$— como nueva aproximación x_1 a la solución (véase la figura 2).

Repitiendo este procedimiento se genera el método iterativo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

que converge a gran velocidad a la solución siempre que el valor inicial x_0 se elija suficientemente cerca. En la película *21 Blackjack* se dice que Newton le robó el método a Joseph Raphson (1668-1715) porque este último lo publicó cincuenta años antes. Aunque es cierto, se sabe que Newton había descubierto el método para el caso polinomial antes que Raphson y que este lo extendió al caso general, por lo que es correcto y justo denominarlo con el nombre de ambos.

CAPÍTULO 3

Dos hombres y un Grand Prix: Abel, Jacobi y la teoría de las funciones elípticas

Quizás el trabajo más importante de Abel, aquel que requirió mayor esfuerzo por su parte y cuyas consecuencias e implicaciones se han revelado más profundas y diversas, fue su contribución al estudio de las funciones elípticas y, en particular, su teorema de adición. Las investigaciones del matemático noruego en este campo tuvieron su fuente de inspiración en el trabajo de Leonhard Euler y Adrien-Marie Legendre.

Toda aproximación al cálculo que intente abarcar los conceptos fundamentales de la materia y que aspire a ofrecer una aproximación reposada, con tiempo para interiorizar las ideas y con material apropiado para aprehender los conceptos básicos como la continuidad, la derivabilidad y la integración de funciones, así como sus aplicaciones geométricas y físicas, requiere construir algunos ejemplos sencillos de funciones que sirvan de banco de pruebas para las distintas ideas que se van a trabajar. No es necesario inventar estos ejemplos «de la nada», improvisando, porque surgen de forma natural (a partir de cuestiones interesantes de física y geometría) y proporcionan por sí mismos un conjunto de problemas cuya resolución ayuda a comprender la teoría. Se trata de las llamadas «funciones elementales»: los polinomios, las funciones trigonométricas, las funciones racionales (algebraicas y trigonométricas), las exponenciales y los logaritmos, así como las funciones inversas de las funciones anteriores —cuando sea posible calcularlas— y las funciones que se pueden obtener a partir de todas las anteriores mediante operaciones algebraicas y composición de funciones. Es importante conocer bien todas estas funciones y estudiarlas con profundidad, lo que proporcionará algunas claves fundamentales para comprender el cálculo. Sin ir más lejos, está claro que los polinomios y las funciones racionales algebraicas (cocientes de polinomios) existen porque es posible sumar, multiplicar y dividir nú-

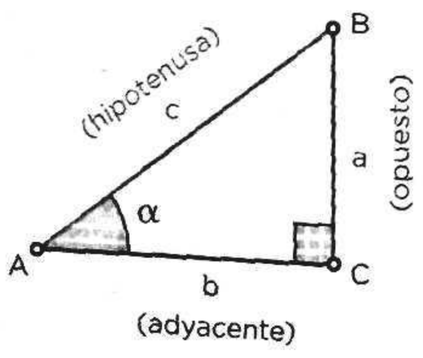
meros. Pero, por poner un ejemplo sencillo, introducir la función trigonométrica sen(θ) requiere algo de geometría.

En concreto, esta función se define como el cociente del cateto opuesto por la hipotenusa en un triángulo rectángulo (como el que se observa en la figura 1), donde la hipotenusa forma un ángulo θ con el cateto contiguo; y el hecho de que este cálculo no dependa del tamaño del triángulo (por lo que se trata de un número perfectamente definido) se debe al teorema de Tales. Lo mismo se puede argumentar para las otras dos funciones trigonométricas directas: el coseno y la tangente.

Así, se descubre que el cálculo es, en realidad, inseparable de la geometría y que, de hecho, existen cuestiones geométricas que motivan la introducción de ideas importantes en el cálculo. Un ejemplo de ello es la búsqueda de longitudes y áreas (es decir, la rectificación y la cuadratura de curvas), temas que llevan a definir ciertas integrales e intentar calcularlas. Desde esta perspectiva, la geometría fue, desde el principio, una fuente de inspiración de la que bebieron los matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX que querían ahondar en el cálculo y, simultáneamente, el cálculo proporcionó un conjunto de técnicas de extrema utilidad para el estudio de objetos geométricos como las curvas y las superficies.

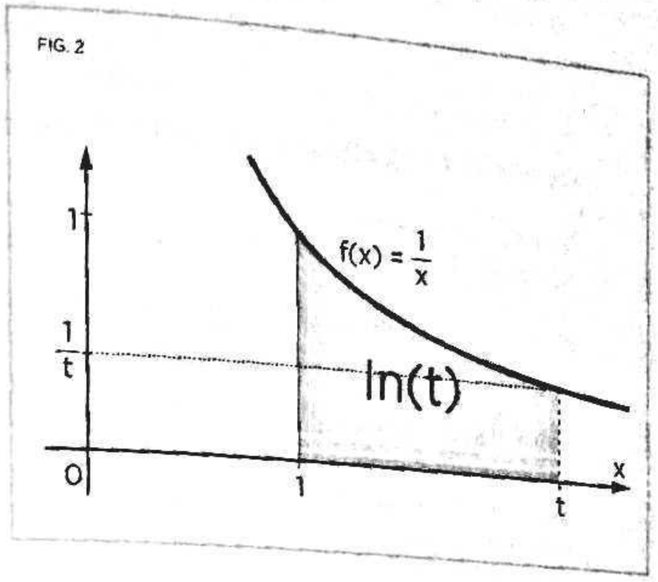
Los estudiantes de cálculo aprenden temprano a hallar áreas y volúmenes. Si además se inician en la geometría diferencial o en las ecuaciones diferenciales, pronto descubrirán algunos resultados que caracterizan estos objetos a partir del conocimiento de ciertas funciones con propiedades y definiciones especiales. Por ejemplo, una curva en el espacio queda determinada a partir de sus funciones de curvatura y torsión. La curvatura mide cuánto se dobla la curva dentro de cierto plano, denominado «osculador», que es el plano que mejor se aproxima a ella. La torsión establece cuánto se separa la curva de su plano osculador.

FIG. 1



Particularmente importante fue, en los albores de la nueva disciplina, abordar desde la perspectiva del cálculo el estudio de las cónicas, que son las curvas obtenidas al intersecar un plano y un cono recto. Así, por ejemplo, los logaritmos resultan de considerar el área encerrada por una hipérbola y el eje de abscisas entre dos puntos dados

FIG. 2



Representación gráfica del concepto de logaritmo

$$\ln(x)=\int_1^x \frac{dt}{t},$$

y las funciones trigonométricas inversas surgen a partir del problema de la rectificación de la circunferencia.

Obviamente, esta metodología se puede aplicar sobre diferentes curvas, y los matemáticos que comenzaron a desarrollar el cálculo se pusieron de inmediato a trabajar en esta dirección. No obstante, descubrieron con estupor que la rectificación de algunas curvas algebraicas sencillas, como la elipse, daba lugar al cálculo de ciertas integrales que, por más que se empeñaban, nadie sabía resolver.

Además, a la luz de los resultados de la mecánica celeste, que describían las trayectorias de los planetas con elipses, la rectificación de estas curvas en concreto se consideraba fundamental. Leibniz propuso el problema a Gregory y Newton en 1675. Él estaba convencido de que podía obtener una expresión cerrada para la longitud del arco de una elipse, pero lo cierto es que en sus deducciones había cometido un error del que se dio cuenta más adelante, tras revisarlas, al recibir la noticia de que los otros matemáticos solo lograban resolver el problema usando series infinitas.

Lo peor del caso es que, a raíz de las aplicaciones geométricas y físicas que estas integrales prometían, su estudio y, al menos, su tabulación, resultaba imperativo. ¿Sería posible expresar estas funciones como funciones elementales?

OBTENCIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si se tiene en cuenta que la longitud de una curva plana $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ entre los puntos $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t_1)$ viene dada por la expresión

$$L(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt,$$

donde $x'(t)$ e $y'(t)$ son las derivadas de las componentes de la curva $\alpha(t)$, y se parametriza la circunferencia de radio unidad entre los puntos de ordenadas $y=0$ e $y=\operatorname{sen}\theta$ mediante la curva $\gamma(y) = (\sqrt{1-y^2}, y)$, la longitud L de dicho segmento de circunferencia viene dada por

$$L = \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \sqrt{\left(\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2 + 1}\, dy = \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \sqrt{\frac{y^2}{1-y^2} + 1}\, dy = \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy.$$

El mismo cálculo, realizado esta vez con la parametrización $\varphi(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$ entre los puntos $t=0$ y $t=\theta$, proporciona el valor

$$L = \int_0^{\theta} \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int_0^{\theta} dt = \theta$$

por tanto, se pueden igualar ambos resultados, de manera que

$$\int_0^{\operatorname{sen}\theta} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \theta.$$

En otras palabras, la integral $\int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$ representa el arco cuyo seno vale X. Es decir,

$$\operatorname{arcsen}(x) = \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy.$$

Así, de manera habitual, las funciones trigonométricas inversas se introducen a partir del estudio de las funciones trigonométricas en base a su definición geométrica deducida de los triángulos rectángulos. Sin embargo el proceso podría realizarse de forma inversa. Se comenzaría con la circunferencia, que es una curva conocida, descrita como el conjunto de soluciones de una ecuación algebraica sencilla y, a partir de su rectificación, se introduciría la función que representa su longitud de arco (en este caso, el arcoseno) y se obtendría la función seno como su función inversa, lo cual se logra con solo forzar la igualdad

$$x = \int_0^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy.$$

LAS INTEGRALES ELÍPTICAS Y EL TEOREMA DE EULER

Se considerará a continuación una elipse de la forma $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ y se supondrá, sin pérdida de generalidad, que el valor de b es mayor que el de a. Esta curva puede parametrizarse usando funciones trigonométricas con la fórmula $\gamma(\theta)=(a\cos\theta, b\operatorname{sen}\theta)$. Utilizando esta expresión se sigue que la longitud del arco de elipse comprendido entre el punto $P(1,0)$ y el punto $Q(a\cos\theta, b\operatorname{sen}\theta)$ es la integral

$$\begin{aligned} L = \int_0^{\theta} \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt &= \int_0^{\theta} \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2(1-\operatorname{sen}^2 t)}\, dt \\ &= b\int_0^{\theta} \sqrt{1-\left(\frac{b^2-a^2}{b^2}\right)\operatorname{sen}^2 t}\, dt \\ &= b\int_0^{\theta} \sqrt{(1-k^2\operatorname{sen}^2 t)}\, dt, \end{aligned}$$

donde $k^2 = \dfrac{b^2-a^2}{b^2}$.

Si se define una nueva variable z como $z = \operatorname{sen} t$, por lo que $dz = \cos t\, dt = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\, dt = \sqrt{1-z^2}\, dt$, de donde se despeja dt

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

y si se sustituye en la expresión de la longitud L, la integral queda expresada en la forma

$$\begin{aligned} L &= b\int_0^{\theta} \sqrt{(1-k^2\operatorname{sen}^2 t)}\, dt \\ &= b\int_0^{\operatorname{sen}\theta} \sqrt{(1-k^2z^2)}\, \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \\ &= b\int_0^{\operatorname{sen}\theta} \frac{(1-k^2z^2)}{\sqrt{(1-k^2z^2)(1-z^2)}}\, dz, \end{aligned}$$

RECTIFICACIÓN DE CURVAS

Si la función $\alpha(t)=(x(t), y(t), z(t))$ parametriza una curva en el espacio, es posible interpretar que la variable t representa el tiempo y que $\alpha(t)$ es la posición, en el instante de tiempo t, de una partícula móvil que se desplaza a lo largo de la curva. Visto así, la derivada de dicha función es el vector $\alpha'(t)=(x'(t), y'(t), z'(t))$, que muestra la velocidad de la partícula en el instante t. Esta «velocidad» obviamente encierra dos significados. Por una parte, su tamaño o módulo

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

señala la rapidez con la que se desplaza la partícula y, por otra, su dirección indica hacia dónde se produce ese desplazamiento. Si se tiene ahora en cuenta que en un movimiento uniforme el espacio recorrido se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo, se deduce que en un intervalo infinitesimal dt, esto es, un intervalo de tiempo muy pequeño, el espacio recorrido por la partícula será igual a $\|\alpha'(t)\|\,dt$ y, por tanto, si se integra la expresión entre dos valores t_0, t_1, se calculará la longitud de la curva entre los puntos $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t_1)$, que viene dada por la expresión

$$L(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$$

Si la curva es plana, se puede suponer que vive en el plano $z=0$, por lo que los cálculos se pueden repetir simplemente imponiendo $z(t)=0$.

que es la integral de una función del tipo

$$\frac{R(x)}{\sqrt{P_4(x)}},$$

donde $R(x)$ es una función racional (un cociente de polinomios) y $P_4(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ es un polinomio de grado cuatro a lo sumo. Como consecuencia de los cálculos acabados de exponer, estas integrales fueron bautizadas por el matemático italiano Giulio Carlo Fagnano (1682-1766) con el nombre de «integrales elípticas». Si se cambia el polinomio $P_4(x)$ del integrando por otro de grado superior a cuatro, se hablará de «integrales hiperelípticas».

Las integrales de este tipo aparecen también en la rectificación de otras curvas algebraicas. Por ejemplo, Fagnano estudió la lemniscata (figura 3), una curva que matemáticamente se expresará diferente según si se utilizan coordenadas cartesianas

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)$$

o coordenadas polares

$$r^2=\cos(2\theta).$$

La rectificación de esta curva conduce a la integral

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

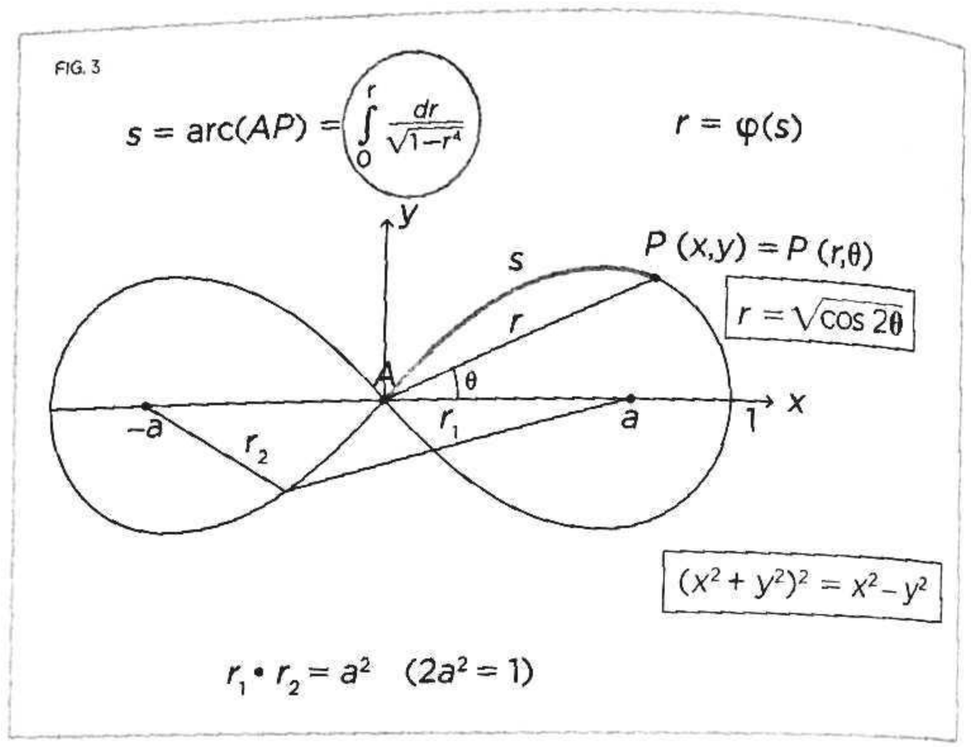
a la que se referirá a partir de ahora como «integral lemniscática» (que es, obviamente, un caso particular de integral elíptica). A pesar de su apariencia sencilla, esta integral se resistía a todo tipo de ataques y solo admitía ser resuelta por técnicas que requerían desarrollos en series infinitas, como el teorema del binomio. En cambio, la integral

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

asociada a la circunferencia, era fácilmente resoluble, no solo con el argumento presentado con anterioridad sino también, por ejemplo, sustituyendo la variable t por la expresión $t=2s/(1+s^2)$, lo que la transformaba en la integral de una función racional. Entonces, el matemático suizo Jakob Bernoulli (1667-1748) planteó la cuestión de si la integral lemniscática definía un nuevo tipo de función, diferente de las otras elementales conocidas hasta el momento.

Esta pregunta, si se piensa un instante, se parece mucho al tipo de interrogantes a los que Abel se había enfrentado cuando estudiaba el problema de la quíntica, pues trata de desvelar si un determinado objeto matemático (una función, en este caso; un número, en el caso de las ecuaciones algebraicas) se puede obte-

Curva lemniscata e integral lemniscática asociada.



ner en un número finito de pasos tras aplicar determinados procesos (bien definidos) a otros objetos ya construidos. De hecho, las técnicas empleadas por Galois para la teoría de ecuaciones algebraicas serían utilizadas posteriormente con la finalidad de demostrar que ciertas funciones, entre las que se incluía el cociente $1/\sqrt{1-t^4}$, no admitían primitiva elemental y, por tanto, la función

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

pertenecía, en efecto, a una nueva clase de funciones trascendentes, más amplia que la de las funciones elementales.

El trabajo de Fagnano terminó por caer en manos de Euler, a quien de inmediato le inspiró el siguiente hermoso teorema de adición: si los números x, y, z están algebraicamente relacionados de tal modo que cumplen la expresión

$$x^2 + y^2 + x^2y^2z^2 - z^2 - 2xy\sqrt{1-z^4} = 0,$$

entonces se satisface la relación

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Fijados los valores de las variables x, y en la ecuación algebraica anterior, es claro que esta se puede resolver para la variable z. Así, es posible interpretar el resultado de Euler afirmando que la suma de las longitudes de dos arcos de la lemniscata asociados a dos parámetros x, y da lugar a la longitud de otro arco de lemniscata cuyo parámetro z está algebraicamente relacionado con los otros dos parámetros. Esto, en realidad, resulta bastante desconcertante, porque la integral lemniscática define en concreto una función trascendente. Se considera que la teoría de integrales elípticas nació justo cuando Euler demostró este teorema. Sin embargo, el verdadero impulsor de una teoría coherente para estas funciones fue Legendre.

LA APORTACIÓN DE LEGENDRE

A partir de 1793, Legendre inició un largo período de investigación sobre las integrales elípticas. Este estudio cristalizó en un extenso tratado en tres volúmenes que publicó en 1825, 1826 y 1828 bajo el título general de *Estudio de las funciones elípticas y las integrales eulerianas*. Su aportación más relevante fue, por un lado, la reducción de las integrales elípticas, mediante ciertas transformaciones, a unos pocos casos especiales, a los que denominó «formas canónicas de primera, segunda y tercera especie». Además, dedicó un esfuerzo titánico a la evaluación numérica precisa de estas integrales.

La técnica de reducir una integral general a unos pocos casos especiales es bien conocida por todo estudiante de cálculo, porque se aplica a la resolución de las integrales de las funciones racionales. Así, cuando se quiere hallar una integral del tipo

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

donde $p(x)$, $q(x)$ son polinomios de coeficientes reales, se procede del siguiente modo: si el grado del numerador es mayor o igual al del denominador, se realizará la división, de modo que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

donde $c(x)$, $r(x)$ son polinomios —siendo $c(x)$ el cociente de la división y $r(x)$ el residuo— y el grado de $r(x)$ tiene que ser menor que el de $q(x)$. Como la integral de un polinomio se calcula de manera inmediata, el problema se reduce al caso en el que el numerador tiene grado estrictamente menor que el denominador. Además, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que el polinomio $q(x)$ es mónico, esto es, el coeficiente del término de mayor grado es la unidad. Colocados ya en esta situación, se hace uso del teorema fundamental del álgebra para descomponer el polinomio $q(x)$ como producto de factores lineales y cuadráticos (si se desea hacer todos los cálculos con números reales),

$$q(x)=(x-r_1)^{n_1}\dots(x-r_s)^{n_s}(x^2+a_1x+b_1)^{m_1}\dots(x^2+a_tx+b_t)^{m_t},$$

y a continuación se demuestra que el cociente $p(x)/q(x)$ se puede descomponer como una suma finita de funciones racionales de la forma

$$\frac{A_{kj}}{(x-r_k)^j} \text{ y de la forma } \frac{B_{hl}x+C_{hl}}{(x^2+a_hx-b_h)^l}$$

para valores apropiados de las constantes A_{kj}, B_{hl}, C_{hl}, lo que reduce el cálculo de la integral de cualquier función racional al cálculo de las integrales de unas pocas funciones racionales, que se pueden estudiar en detalle.

En el caso de las integrales elípticas, la reducción realizada por Legendre conducía al estudio de las integrales

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\ \int_0^x \sqrt{\frac{(1-k^2t^2)}{(1-t^2)}}dt \text{ y } \int_0^x \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

que reciben el nombre de integrales elípticas de primera, segunda y tercera especie, respectivamente. Si se sustituye en ellas la variable t por la expresión $t=\operatorname{sen}\theta$, y se tienen en cuenta los parámetros n, k, estas integrales quedan expresadas por las funciones

$$F(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}},\ E(\phi,k)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \text{ y}$$

$$\Pi(n,\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{(1+n\operatorname{sen}^2\theta)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}},$$

respectivamente, donde $\phi=\operatorname{arcsen}(x)$. Legendre, motivado por las aplicaciones que tenían en mecánica celeste, tabuló estas funciones, para lo que necesitó demostrar que verificaban ciertas relaciones funcionales e idear varios métodos iterativos.

EL PÉNDULO SIMPLE

Uno de los problemas de física en los que aparecen, de forma natural, las integrales elípticas, es el estudio del péndulo simple. Si se asume que la única fuerza que interviene en el movimiento del péndulo es la gravedad, es fácil deducir que la ecuación que gobierna dicho mecanismo, escrita en términos del ángulo $\theta(t)$ que forma la varilla de la que está suspendido el peso con el eje de ordenadas en el instante t, viene dada por

$$\theta''(t)+\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta(t)=0,$$

donde g es la constante gravitacional, L la longitud de la varilla y θ'' indica la segunda derivada de la expresión del ángulo respecto del tiempo. Se sabe que el movimiento del péndulo es periódico porque no existe rozamiento, de manera que al no haber pérdida de energía, toda la energía cinética acumulada en el momento en

FÓRMULAS PARA EL SENO Y EL COSENO DE UNA SUMA

La tabulación de las funciones $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ se apoya, de forma muy evidente, en las fórmulas

$$\begin{cases}\operatorname{sen}(\theta+\varphi)=\operatorname{sen}\theta\cos\varphi+\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\\ \cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\end{cases}$$

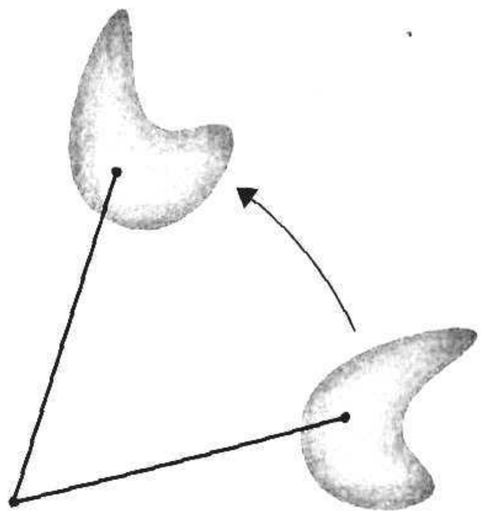
y sus corolarios, las fórmulas del ángulo doble y del ángulo mitad (por ejemplo, $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta$). Una forma elegante de deducir estas fórmulas consiste en observar que la matriz (un conjunto de números agrupados en filas y columnas dispuestas sobre una tabla rectangular) asociada a R_θ, donde R representa la rotación del plano (en sentido antihorario) de un ángulo θ, viene dada por

$$M_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

Al componer dos rotaciones, los ángulos se suman (primero se rota un ángulo y a continuación el siguiente) y, como consecuencia, el producto de las matrices asociadas a dos rotaciones coincide con la matriz asociada a la rotación de la suma de sus ángulos, por lo que

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta+\varphi) & -\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\\ \operatorname{sen}(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi\\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}.$$

Las fórmulas para el seno y el coseno de una suma se deducen de igualar términos en la identidad anterior tras realizar el producto indicado en el miembro de la derecha. Este tipo de expresiones son más difíciles de obtener en el caso de las funciones elípticas, pero Legendre se las ingenió para calcularlas, lo cual resultó de extrema utilidad en su construcción de tablas de valores para dichas funciones.



Ejemplo de rotación antihoraria y su efecto sobre un trozo del plano.

el que la varilla se encuentra alineada con la fuerza de la gravedad debe restituirse en energía potencial y, por tanto, la varilla subirá hasta ocupar la misma altura desde la que se dejó caer el peso inicialmente, y el movimiento se reproducirá de nuevo, pero en sentido inverso hasta que el peso vuelva a ocupar su posición inicial (véase la figura 4).

Si se conoce el ángulo desde el cual se suelta el peso, una pregunta interesante es, pues, cuál va a ser el período T resultante, esto es, el tiempo mínimo entre dos instantes en los que el péndulo se encuentra en la misma posición y con la misma velocidad. Para responder, es necesario realizar algunos cálculos sencillos. Multiplicando la ecuación del movimiento por $\theta'(t)$ e integrando, se obtiene que

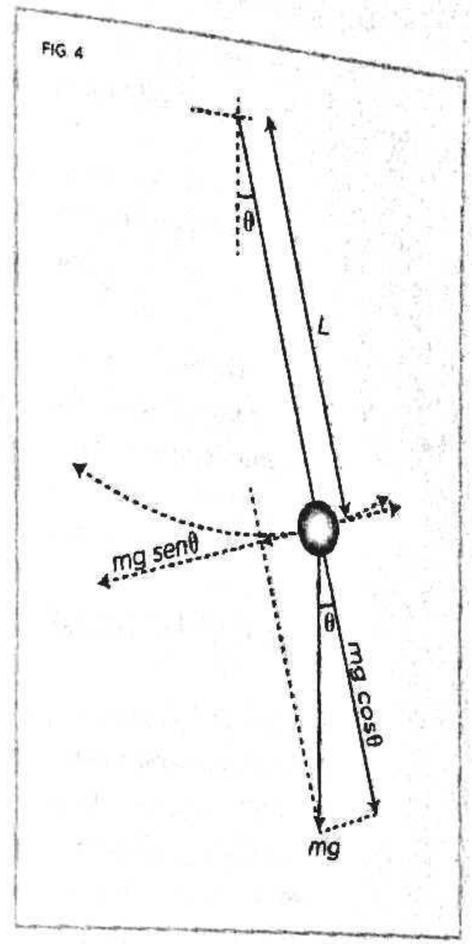


Diagrama de fuerzas del péndulo simple.

$$\frac{\theta'(t)^2}{2}-\frac{g}{L}\cos\theta(t)=c,$$

donde c es una constante desconocida. Ahora bien, si $\theta(0)=\alpha$ es el ángulo máximo del péndulo, entonces

$$\frac{\theta'(0)^2}{2}=0=c+\frac{g}{L}\cos\alpha,\ \text{por lo que}\ c=-\frac{g}{L}\cos\alpha.$$

Se sigue que

$$\theta'(t)=\pm\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{2(\cos\theta(t)-\cos\alpha)}=\pm\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{4\left(\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta(t)}{2}\right)}$$

y, tomando la raíz positiva e integrando entre 0 y α,

$$\frac{1}{2}\int_0^\alpha\frac{d\theta}{\sqrt{\left(\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)}}=\int_0^{T/4}\sqrt{\frac{g}{L}}\,dt=\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{T}{4}.$$

Es decir, el período del péndulo viene dado en términos de la integral elíptica de primera especie,

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\left(\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)}} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}F\left(\alpha,\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Es más, llegados a este punto no es difícil demostrar que el cálculo explícito de la función $\theta(t)$ pasa por hallar la función inversa de una integral elíptica.

LA CREACIÓN DE UNA TEORÍA

Cuando Degen recomendó a Abel que se dedicase a las integrales elípticas, él sin duda siguió el consejo y se dispuso a estudiar las contribuciones de Euler y Legendre. Abel no se demoró en tener ideas propias sobre esta materia, pues ya en 1823, durante su visita a Copenhague, mostró a Degen un pequeño artículo en el que se utilizaba la idea de invertir las funciones elípticas. Es más, según declararía posteriormente Holmboe, Abel había redactado varios manuscritos sobre estos temas con anterioridad a su viaje por Europa, en 1925. Sin embargo, no fue hasta dicho viaje cuando Abel se decidió a dar una forma definitiva a sus ideas y publicarlas, cosa que hizo en una larga memoria titulada «Investigaciones sobre las funciones elípticas», aparecida en *Crelle*, en los volúmenes de 1827 y 1828.

La primera contribución importante fue decidir que las funciones inversas de las funciones que aparecían como resultado del cálculo de integrales elípticas merecían atención. En su primera aproximación al tema, Abel concentró su interés exclusivamente en las integrales elípticas de primera especie. Además, se dispuso a estudiar de forma directa la integral

$$\alpha(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-c^2t^2)(1+e^2t^2)}},$$

que, debido a sus simetrías, consideraba más interesante que la forma canónica propuesta por Legendre para estas funciones. Entonces se planteó investigar la función $\phi(t)$ tal que $\phi(\alpha(x))=x$. En otras palabras, se ocupó del problema de la inversión de la función $\alpha(x)$, buscando la función $\phi(x)$ que resolvía la ecuación

$$x = \int_0^{\phi(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-c^2t^2)(1+e^2t^2)}}.$$

Este proceso de inversión se puede hacer, en primera instancia, cuando se considera la función $\alpha(x)$ restringida al intervalo $[0,1/c]$, pues la función es estrictamente creciente en dicho intervalo, siendo su valor máximo

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^{1/c} \frac{dt}{\sqrt{(1-c^2t^2)(1+e^2t^2)}}.$$

Esto significa, en particular, que la función inversa $\phi(x)$ está bien definida, en tal punto del proceso, sobre el intervalo $[0,\omega/2]$, y además satisface $\phi(0)=0$ y $\phi(\omega/2)=1/c$.

A continuación, Abel se planteó estudiar las propiedades que tenían las funciones obtenidas de este modo, a las que bautizó con el nombre de «funciones elípticas».

Para empezar, extendió su dominio de definición a todo el plano complejo (excepto, quizás, unos pocos puntos aislados donde la función se hacía infinita) y demostró que estas funciones eran periódicas por partida doble. Esto significa que existían dos números complejos w_1, w_2 linealmente independientes, tales que $\phi(z)=\phi(z+w_1)=\phi(z+w_2)$ para todo z.

Con el fin de extender sus funciones más allá del intervalo $[0,\omega/2]$, introdujo las funciones auxiliares $f(\alpha)=\sqrt{1-c^2\phi^2(\alpha)}$ y $F(\alpha)=\sqrt{1+e^2\phi^2(\alpha)}$ (también doblemente periódicas), y probó el siguiente teorema de adición:

$$\phi(\alpha+\beta) = \frac{\phi(\alpha)f(\beta)F(\beta)+\phi(\beta)f(\alpha)F(\alpha)}{1+e^2c^2\phi^2(\alpha)\phi^2(\beta)},$$

$$f(\alpha+\beta)=\frac{f(\alpha)f(\beta)-c^2\phi(\alpha)\phi(\beta)F(\alpha)F(\beta)}{1+e^2c^2\phi^2(\alpha)\phi^2(\beta)},$$

$$F(\alpha+\beta)=\frac{F(\alpha)F(\beta)+e^2\phi(\alpha)\phi(\beta)f(\alpha)f(\beta)}{1+e^2c^2\phi^2(\alpha)\phi^2(\beta)}.$$

No hay que desanimarse al contemplar estas fórmulas por su aspecto enrevesado. En realidad, lo fundamental en ellas, lo que debemos recordar, lo que demuestran y fue utilizado por Abel con enorme rendimiento, es que el valor de la función elíptica ϕ en el punto $\alpha+\beta$ se puede rescatar a partir de los valores de esta función en los puntos α, β. Es esta propiedad en concreto la que le permitió extender dicha función fuera del intervalo $[0,\omega/2]$. De hecho, tras algunos cálculos algebraicos sencillos, comprobó que la función se podía definir sobre toda la recta real, donde era periódica con período igual a 2ω. Además, cambiando la variable t por it, donde $i=\sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, y estudiando las propiedades de la integral elíptica conjugada

$$\tilde{\alpha}(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-e^2t^2)(1+c^2t^2)}},$$

demostró que, si se introducía la constante $\omega'/2=\tilde{\alpha}(1/e)$, entonces es posible definir la función ϕ sobre el eje imaginario, donde se comporta como una función periódica con período $2\omega'$. Finalmente, observó que el teorema de adición que acababa de probar permitía extender ϕ a todo el plano complejo, excepto en los puntos que pertenecen a $1/2(\omega+i\omega')\mathbb{Z}+1/2(\omega-i\omega')\mathbb{Z}$, donde la función tiene polos simples (singularidades, puntos donde la función se hace infinita), como una función periódica con períodos $w_1=\omega+i\omega'$ y $w_2=\omega-i\omega'$.

Uno de los objetivos principales (si no el principal) de este primer artículo de Abel era resolver, para la función ϕ, el problema de la división. Es decir, quería conocer una expresión que determinase el valor de $\phi(\alpha)$ en términos de $\phi(m\alpha)$, o lo que es equivalente, identificar $\phi(\alpha/m)$ en términos de $\phi(\alpha)$. Este problema tenía un origen geométrico y equivalía a decidir para qué valores enteros

LIOUVILLE Y LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

Uno de los teoremas fundamentales de la teoría de funciones de variable compleja, el teorema de Liouville, afirma que si una función es derivable en sentido complejo en todos los puntos del plano complejo, entonces o bien no está acotada o bien es una constante. Este teorema tiene importantísimas aplicaciones, entre las que destaca la demostración, como corolario suyo, del teorema fundamental del álgebra. Curiosamente, también está relacionado con las funciones elípticas. De hecho, Joseph Liouville probó este resultado tras estudiar las *Obras completas* de Abel. En aquel momento se interesó por la doble periodicidad de las funciones elípticas. Su alumno, Charles Hermite, le había mostrado una prueba muy sencilla y elegante, basada en los desarrollos de Fourier, de que una función real de variable real, caso de tener dos períodos independientes (es decir, linealmente independientes sobre el cuerpo de los números racionales), debe ser constante. La demostración de este hecho consistía en desarrollar la función en serie de senos y cosenos respecto de uno de los períodos y, a continuación, forzar la identidad entre esta y su traslación con respecto del segundo período. Usando la expresión para el seno y el coseno de una suma en las series de ambos lados de la ecuación, se llegó a una identidad del tipo

$$(a_k^2+b_k^2)\left(\operatorname{sen}^2\frac{2k\pi\beta}{\alpha}+\left(1-\cos\frac{2k\pi\beta}{\alpha}\right)^2\right)=0, \text{ para } k=1,2,\ldots;$$

donde α, β son los períodos de la función y

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2k\pi}{\alpha}+b_k\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{\alpha}\right)$$

es su desarrollo de Fourier respecto del período α. Si β/α es un número irracional —número cuyos decimales son infinitos y no presentan ninguna periodicidad—, las igualdades anteriores forzaban que $a_k=b_k=0$ para $k\geq 1$, y la función era, por tanto, constante. Liouville demostró este resultado primero para las funciones holomorfas doblemente periódicas y, después, para las funciones enteras. En particular, de la doble periodicidad de las funciones elípticas se dedujo que estas deben tener alguna singularidad (y, gracias a la periodicidad, infinitas singularidades). Fue justo Liouville quien identificó las funciones elípticas con las funciones meromorfas doblemente periódicas, que es la forma habitual de presentarlas en la actualidad. Recuérdese que «holomorfa» significa «derivable como función de variable compleja» y «meromorfa», que es holomorfa en un abierto, al que se ha borrado un conjunto discreto de puntos (donde se dice que tiene singularidades aisladas) y que, si α es una de tales singularidades, entonces la función $(z-a)^N f(z)$ es derivable en α para algún entero positivo N.

m era posible calcular —mediante sumas, productos, divisiones y extracción de raíces— las coordenadas del punto de la circunferencia de radio la unidad que definía un arco de circunferencia de longitud $2\pi/m$, que es el punto

$$\left(\cos\frac{2\pi}{m}, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}\right).$$

Se trataba de un problema que se había planteado en la Grecia clásica, permaneciendo abierto hasta la llegada de Gauss, quien, en sus *Disquisitiones arithmeticae*, había estudiado el problema de clasificar los polígonos regulares que se podían construir con regla y compás. Gauss demostró que si $m=2^k p_1 p_2 \dots p_t$ para ciertos $k>0$ y $t\geq 0$, donde todos los números p_i eran primos de la forma $p_i = 2^{2^{n_i}}+1$ para algún valor entero $n_i>0$ (primos de Fermat), entonces el polígono regular de m lados se puede construir con regla y compás. El matemático alemán afirmó que su condición es también necesaria, pero no llegó a probarlo. La demostración de este hecho llegaría de manos del francés Pierre Wantzel (1814-1848) en 1837. Abel se obsesionó con resolver el problema correspondiente para la lemniscata, y eso le llevó a estudiar (y solucionar) el problema de la división para las funciones ϕ que acababa de introducir y a aplicar sus resultados al caso $e=c=1$, que es el que aparece en la rectificación de la lemniscata. En su artículo, Abel comprobó que los puntos que dividen la lemniscata en n partes iguales se pueden construir con regla y compás si n se descompone como producto de una potencia entera de 2 y un número finito de primos de Fermat distintos dos a dos. Es decir, $n=2^k p_1 p_2 \dots p_t$ con $k>0$, $t\geq 0$ y $p_1, \dots, p_t$ primos de Fermat distintos. De nuevo, la necesidad de esta condición tuvo que esperar bastante tiempo para ser comprobada. Fue el estadounidense Michael Rosen (n. 1938) quien, en 1981, lo resolvió usando la teoría de cuerpos de clase, una rama avanzada de la teoría de números algebraicos. Una prueba elemental del resultado, basada en la demostración de que ciertos polinomios son irreducibles, fue publicada por los matemáticos estadounidenses David A. Cox (n. 1948) y Trevor Hyde (n. 1990) en 2014, en el *Journal of Number Theory*, una de las revistas más prestigiosas de teoría de números en la actualidad. Es curioso el protagonismo que tienen los primos de Fermat en estos resultados. Recuérdese, además, que existen numerosos problemas abiertos relacionados con esta sucesión de números. Por ejemplo, no se sabe si hay infinitos primos de Fermat y, de hecho, también se desconoce si la sucesión de números de la forma $2^{2^n}+1$ contiene infinitos números compuestos.

Cuando Abel resolvió el problema de la división para la lemniscata, escribió entusiasmado a Holmboe: «Ahora que he resuelto el misterio que reposaba sobre la teoría de Gauss para el problema de la división en la circunferencia, veo con la claridad de la luz del día cómo llegó allí», y luego añadía: «Todo lo que he escrito sobre la lemniscata es el fruto de mis esfuerzos en la teoría de ecuaciones». En efecto, la teoría que había desarrollado era una mezcla de la teoría de funciones elípticas y su teoría de ecuaciones.

Las «Investigaciones sobre las funciones elípticas» de Abel contenían, además de los resultados que se acaban de exponer, una serie de teoremas bastante técnicos dedicados a desarrollar las funciones elípticas como series infinitas y productos infinitos, que eran técnicas de representación de funciones a las que los matemáticos de la época estaban acostumbrados. A estas técnicas añadió el uso sistemático de las ecuaciones funcionales. Y, posteriormente, en su «Resumen de una teoría de funciones elípticas», de 1829, incorporó a su lista de métodos de describir las funciones elípticas la de desarrollarlas como un cociente de dos series de potencias. Todos estos métodos tenían el objetivo de exponer diferentes formas de representar la misma función, lo cual servía sin duda alguna para su análisis desde distintas perspectivas, según el gusto y los conocimientos de quien las fuera a estudiar. En este punto hay que decir que, a diferencia de lo que había sucedido con su trabajo sobre el teorema del binomio, Abel no fue especialmente preciso ni mostró excesivo cuidado en los aspectos relacionados con la convergencia de los procesos infinitos que utilizó para estudiar las funciones elípticas. Se dejó llevar en este caso por la tradición heredada de los tiempos de Euler, ya que su interés por obtener nuevos resultados sobrepasó a su celo a la hora de cuidar el rigor y los detalles.

EL TEOREMA DE ABEL

Cuando Abel llegó a París, en 1826, era verano. La universidad estaba cerrada. No había clases ni se podía acudir a biblioteca alguna. Sin embargo, estos acontecimientos, que podrían haberle incomodado, no parecieron importarle y, de hecho, fueron acogidos con satisfacción. No es que deseara descansar o no quisiera encontrarse, después de tan largo viaje, con los sabios de allí, que eran la élite matemática del momento. Todo lo contrario, Abel vio en estas circunstancias la oportunidad de preparar mejor su primer contacto con tan destacadas personalidades. Por un lado, deseaba perfeccionar su francés. Por otro, pretendía finalizar una memoria, en la que venía trabajando desde tiempo atrás, sobre las funciones elípticas. Quería presentar el manuscrito ante la Academia de Ciencias y confiaba que fuera aceptado para su publicación en las *Memorias de sabios extranjeros*. Al mismo tiempo, estaba redactando otros trabajos que quería presentar a los *Anales de matemáticas puras y aplicadas* del francés Joseph Gergonne (1771-1859), a los *Anales* del astrónomo austríaco Joseph von Littrow (1781-1840) y a *Crelle*. De todos estos trabajos que Abel llevaba entre manos, el más profundo y el que más tiempo le consumía era la memoria para la Academia de Ciencias, la «Memoria de París», que es como ha sido bautizado por la historia, cuyo recorrido hasta su publicación, en 1841, fue bastante azaroso, pero su importancia le coloca en primera posición en la obra del protagonista de este libro, pues contiene el resultado más destacado (y difícil) demostrado por Abel en toda su vida. Este llevaba por título «Memoria sobre una propiedad general de una clase muy amplia de funciones trascendentes» y su objetivo principal era probar un teorema de adición general —al estilo del teorema de adición que Euler había presentado para la lemniscata— para las integrales del tipo

$$\int_a^x R(t,y)\,dt,$$

donde $R(x, y)$ es una función racional e $y = y(t)$ resuelve una ecuación algebraica irreducible del tipo

$$f(t, y)=y^n+f_1(t)y^{n-1}+\ldots+f_n(t)=0.$$

Estas integrales, llamadas «abelianas» en honor a Abel, generalizan las elípticas e hiperelípticas, que son las que se corresponden con una ecuación del tipo $f(t, y)=y^2-P(t)$, donde $P(t)$ es un polinomio de grado 3 o 4 (en el caso elíptico) o de grado mayor que 4 (en el caso hiperelíptico). Obsérvese que la ecuación $f(x, y)=0$ define una curva algebraica plana que generaliza la lemniscata (cuya ecuación viene dada por $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ o, equivalentemente, $y^4+(2x^2+1)y^2+x^4-x^2=0$).

> «La práctica moderna de enmarcar el teorema de Abel en términos de variables complejas y superficies de Riemann no solo oscurece la gran penetración de Abel y la forma en que abordó el tema, sino que también conduce a enunciados que son menos satisfactorios que el original.»
>
> — HAROLD M. EDWARDS, EN SU CONFERENCIA «LA VISIÓN DE ABEL DEL TEOREMA DE ABEL», BALTIMORE, 2014

El resultado principal de la memoria, expresado en términos elementales, establece lo siguiente: dada la curva algebraica plana C definida por una ecuación irreducible del tipo

$$f(x, y)=y^n+f_1(x)y^{n-1}+\ldots+f_n(x)=0,$$

existe un número entero $p>0$ (que hoy se denomina género de la curva) tal que, para todo entero positivo k, y toda función racional $R(x, y)$, cualquier suma así expresada

$$\int^{(x_1,y_1)} R(x,y)\,dy+\cdots+\int^{(x_k,y_k)} R(x,y)\,dy,$$

donde los límites inferiores se consideran fijos (pero arbitrarios) y las integrales se calculan sobre la curva C, se expresa como una función elemental en términos de las variables $x_1,\ldots,x_k, y_1,\ldots,y_k$ más una suma del tipo

$$\int^{(z_1,s_1)} R(x,y)\,dy+\cdots+\int^{(z_p,s_p)} R(x,y)\,dy,$$

donde $z_1,\ldots, z_p$ son valores que verifican una ecuación algebraica en la variable z cuyos coeficientes son funciones racionales de $x_1,\ldots, x_k, y_1,\ldots, y_k$, y los valores $s_1,\ldots, s_p$ se obtienen a partir de los valores $z_1,\ldots, z_p$ y de la exigencia de que el punto (z_i, s_i) pertenezca a la curva C. Las relaciones así establecidas entre las coordenadas $x_1,\ldots, x_k, y_1,\ldots, y_k$ y las coordenadas $z_1,\ldots, z_p, s_1,\ldots, s_p$ determinan, además, los límites inferiores de las p integrales últimas en términos de los límites inferiores de las k integrales iniciales.

«Cauchy está loco, y no hay manera de llevarse bien con él, aunque ahora mismo es el único que sabe cómo se deben hacer las matemáticas.»

— Niels Henrik Abel.

Esta fue la primera vez que se caracterizó el género de una curva algebraica, que es uno de esos conceptos matemáticos a los que se puede llegar desde muy distintas perspectivas y que, por tanto, acaban siendo centrales en una buena parte de esta disciplina. Evidentemente, Abel no usó dicho término para referirse al número natural p. Tal terminología es posterior, y tiene su origen en el trabajo desarrollado por numerosos matemáticos que investigaron en temas de geometría, topología y geometría algebraica, incluidos nombres tan importantes como el británico William Kingdon Clifford (1845-1879) y los alemanes Alfred Clebsch (1833-1872), Adolf Hurwitz (1859-1919), Emmy Noether (1882-1935) o Bernhard Riemann (1826-1866), entre otros.

Abel entregó su memoria a la Academia de Ciencias y el lunes 30 de octubre de 1826 fue presentada por su secretario, Jean-Baptiste Joseph Fourier, quien leyó (en presencia de Abel) la introducción del manuscrito ante los académicos. La revisión del trabajo se dejó en manos de Cauchy y Legendre, aunque el encargado de redactar un informe era Cauchy. Pero el matemático francés, que vivía pendiente de su propia obra, se olvidó del manuscrito y este fue abandonado en un cajón hasta que, en 1829, se enteró de la temprana muerte de Abel. Entonces lo leyó y presentó un informe favorable,

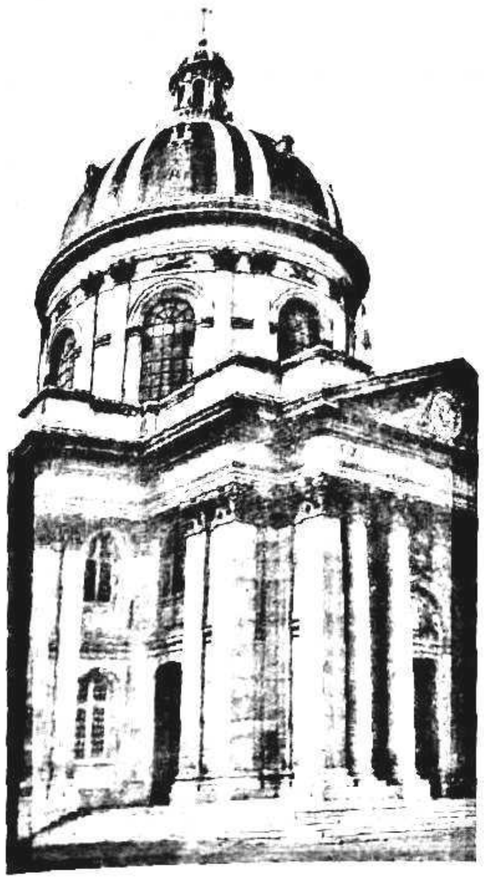


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA
Edificio de la Academia de Ciencias de París, creada en 1666 durante el reinado de Luis XIV.

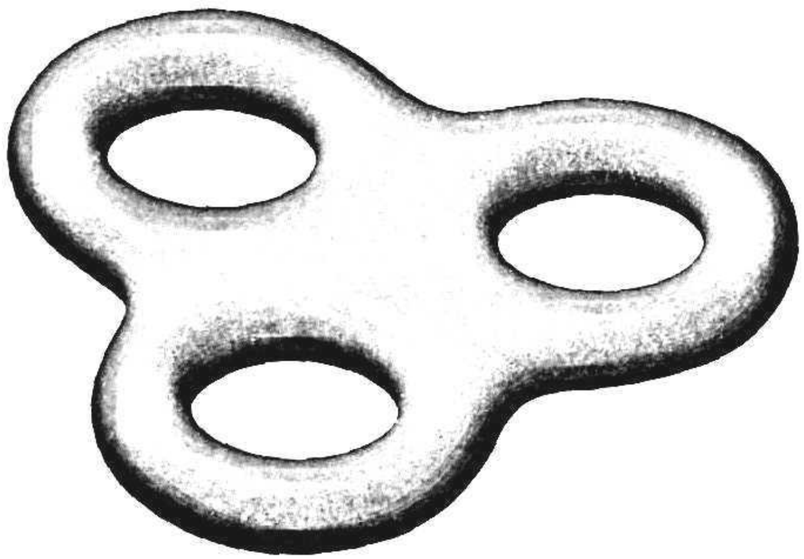
FOTO SUPERIOR DERECHA
Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), Fourier, quien presentó ante la Academia de Ciencias de París la memoria de Abel.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA
Retrato-caricatura del matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

FOTO INFERIOR DERECHA
Retrato de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), quien, junto con Legendre, fue responsable de informar sobre la «Memoria de París», de Abel.

¿QUÉ ES EL GÉNERO DE UNA CURVA?

Asociada a la ecuación $f(x,y)=0$ —que define una curva algebraica C primero como un objeto del plano real $\mathbb{R}^2$, luego, de forma ampliada, como un trozo del «plano complejo» $\mathbb{C}^2$ y, finalmente, mediante la adjunción de un número finito de puntos, que la convierten en un espacio compacto— se puede construir una superficie topológica que, además, tiene las propiedades de ser compacta, orientable y sin bordes (compacta significa que es cerrada y acotada; orientable quiere decir que, cuando nos desplazamos sobre ella, independientemente de cómo se haga, nuestra idea de derecha e izquierda no cambia, y sin bordes significa que todo punto vive en el interior de un entorno que es homeomorfo a un disco abierto). Cada una de estas superficies se puede identificar (vía un homeomorfismo, es decir, una función continua, biyectiva, y con inversa continua de un espacio topológico a otro) de forma unívoca con una esfera con p asas añadidas o, lo que es lo mismo desde el punto de vista topológico, con la suma conexa de p toros. Este valor p es lo que se llama género de la superficie (o, también, de la curva algebraica C). Una caracterización muy visual del género es la siguiente: coincide con el máximo número de círculos disjuntos que se pueden eliminar de la superficie de manera simultánea sin que esta se rompa en más de un trozo. Aquí se entiende por «círculo» cualquier curva que se pueda pintar dentro de la superficie y sea topológicamente equivalente a la circunferencia. Existen fórmulas que permiten, a partir de la ecuación que define la curva, calcular su género.



Suma conexa de tres toros. Es un ejemplo de superficie de género $p = 3$.

lo que llevó a la Academia a incluirlo entre los admitidos para publicación en sus *Memorias de sabios extranjeros*, tal como había sido el deseo de Abel.

Los últimos días de Abel en París, la ciudad que había sido el centro de todas sus esperanzas pero donde no lograba captar la atención ni obtener el reconocimiento que en realidad merecía de los grandes matemáticos del momento, fueron penosos. Se le acababa el dinero de la beca y, en consecuencia, malvivía y se alimentaba de forma deficiente. Para poder cumplir con los plazos estipulados por su compromiso con el gobierno noruego, tuvo que pedir dinero prestado a Holmboe y, aun así, no le llegaba. No podía quedarse en Francia. Era el momento de volver y lo hizo, a petición de Crelle, pasando primero por Berlín y Copenhague. De manera paradójica, incapaz de asumir extras de ningún tipo, durante las últimas semanas que pasó en París se dedicó exclusivamente a estudiar, lo que resultó muy fructífero desde el punto de vista matemático. Allí comenzó, desesperado por la ausencia de respuesta por parte de la Academia, a redactar la extensa memoria «Investigaciones sobre las funciones elípticas», descrita en la sección anterior. Abel abandonó París el 29 de diciembre de 1826, rumbo a Berlín.

LA RIVALIDAD CON JACOBI Y EL GRAND PRIX DE 1830

Es muy probable que Abel tuviera algún contacto —aunque este debió de ser muy casual— en el Berlín de 1825, durante la época en la que conoció a Crelle, con otro joven matemático alemán cuyo nombre ha quedado unido de forma indisoluble al suyo por la historia: Jacob Jacobi (1804-1851). En aquella época, Jacobi había logrado ya defender su habilitación, y disfrutaba de una posición como profesor en la Universidad de Berlín, donde impartía clases de geometría diferencial —un tema por el que al parecer Abel nunca mostró interés, así que es posible que no asistiera a sus clases—.

Jacobi era un magnífico docente que hacía fácil lo difícil. Sin embargo, su arrogancia le convertía en un personaje insoportable

para la mayoría. Cuando Gauss preguntó al matemático alemán Friedrich Bessel —quien era amigo de ambos— por este joven talento (que le había remitido algunos trabajos excelentes sobre teoría de números), Bessel se vio forzado a incluir en su respuesta el siguiente comentario:

> No hay duda de que posee un gran talento, pero desde que llegó aquí ha logrado que casi todo el mundo se considere su enemigo, porque a todos y cada uno les ha dicho algo desagradable, y lo ha hecho de tal modo que ninguno podrá olvidarlo. Aun así, confío que con el tiempo se olviden todas estas estupideces y no se mencionen más. Conmigo se ha comportado siempre de manera correcta...

Hay que decir que, en efecto, con el paso de los años, Jacobi abandonaría de forma gradual sus actitudes arrogantes y que, en el caso que aquí nos ocupa —la relación de competencia que mantuvo con Abel en torno a las funciones elípticas—, siempre se expresó correctamente e, incluso, mostró admiración por el trabajo de Abel (y lo mismo sucedió por parte del joven noruego).

Tanto Jacobi como Abel habían estudiado la obra de Legendre. Aunque a Jacobi la lectura no le resultó inspiradora y, de hecho, estuvo tentado de abandonar el tema. Sin embargo, poco antes de devolver el libro de Legendre a la biblioteca porque le resultaba pesado, tuvo un momento de inspiración que le permitió redactar dos pequeños artículos para la revista del astrónomo danés y alemán Heinrich Christian Schumacher, *Astronomische Nachrichten*.

Schumacher tuvo dudas sobre el trabajo de Jacobi ya que anunciaban varios resultados, pero no contenía las pruebas. No era, pues, el tipo de estudio que a él le hubiera gustado publicar. Como no era experto en el tema, pero sabía de buena tinta que Gauss se había dedicado a trabajar en este ámbito y que era reacio a publicar, tuvo la idea de preguntarle su opinión. Gauss reaccionó diciéndole que, en efecto, los resultados de Jacobi eran ciertos, y que lo sabía porque constituían parte de otros que él había logrado demostrar pero que aún no había sometido a publicación. Además, le rogó que, por favor, no le remitiera más artículos de este tipo en el futuro. Schumacher, contrariado por la agria respuesta de Gauss,

CARL GUSTAV JACOB JACOBI

A diferencia de Abel, Carl Gustav Jacob Jacobi nació en el seno de una familia acaudalada, en Potsdam, en 1804. Mostró desde muy pronto que tenía un especial talento para el estudio. Con solo dieciséis años comenzó sus estudios en la Universidad de Berlín y con veinte ya había defendido su tesis doctoral. En 1825 estaba habilitado para dar clases en las universidades alemanas como *Privatdozent*. Dos años más tarde, en 1827, logró su nombramiento como profesor titular en la Universidad de Königsberg, puesto que abandonó en 1842 por motivos de salud. Entonces el gobierno de Prusia le asignó una pensión vitalicia que le permitió retirarse a vivir en Berlín, donde falleció en 1851. Sus contribuciones a la teoría de funciones elípticas le pusieron en feroz competencia con Abel, pero la muerte temprana de este lo liberó de tal tipo de tensiones, y le dejó tiempo para desarrollar sus propias ideas de forma más despreocupada. A pesar de su carácter orgulloso, supo ver en Abel a un justo competidor y un gran matemático por el que no dudó en expresar su admiración.

le pidió explicaciones. Tras una larga colaboración entre ambos, no entendía por qué de pronto rechazaba que le enviara otros trabajos. A esto Gauss respondió rápidamente, conciliador:

> Me preocupa que hayas malinterpretado mis observaciones sobre las contribuciones de Jacobi de un modo que resulte injusto para mí. Siempre estaré preparado para examinar artículos matemáticos, incluso aquellos que no me interesan, si puedo serte de utilidad. Pero no quiero recibir este tipo de comunicaciones, como las de Jacobi, que tú mismo no deseas imprimir, porque mis propios intereses están en juego. Sus resultados son solo fragmentos de mis investigaciones, más extensas, las cuales desearía editar y publicar en un trabajo comprehensivo alguna vez en el futuro, si el cielo me gratifica con

vida, energía y paz. Por tanto, no puedo ser indiferente a que alguien pueda acusarme de que algunas partes de dicho trabajo las haya conocido mediante comunicaciones privadas.

Como Gauss confirmaba la validez de los resultados, Schumacher decidió publicarlos, aunque seguía pensando que Jacobi debería entregar lo antes posible sus pruebas.

Las dos notas vieron por fin la luz en septiembre de 1827. Ese mismo mes apareció, en *Crelle*, la primera parte de las «Investigaciones sobre las funciones elípticas» de Abel (cuya redacción había terminado mientras estaba en Berlín, de camino a casa). Esta memoria, que sería descrita posteriormente como «un viaje de Magallanes por el inmenso océano de las funciones», y las dos notas de Jacobi hicieron saltar las alarmas entre los matemáticos cercanos a Gauss y Legendre, pues se daban cuenta de que tanto Abel como Jacobi estaban revolucionando el estudio de las integrales elípticas y algunos de ellos escribieron a Gauss para que se apresurara a publicar sus propios resultados si quería garantizarse el reconocimiento de haberlos descubierto antes que nadie.

La reacción de Gauss fue en parte airada, pues afirmaba que Abel se le había anticipado, publicando «una tercera parte» de lo que él ya había hecho en 1798 (pero no había salido a la luz) y, en parte, generosa porque reconocía que la memoria de Abel estaba escrita con elegancia y acierto y, según sus palabras, eso le hacía «sentirse aliviado» del peso de tener que redactar por sí mismo esos resultados.

Legendre respondió de forma mucho más humilde. A Jacobi le advertía de que uno de sus resultados ya lo había publicado él, pero le expresaba su enorme admiración por el segundo (una fórmula muy general para la transformación de integrales elípticas) ya que él mismo había trabajado intensamente y sin éxito en esa misma dirección. A continuación le pedía que, por favor, suministrara las pruebas porque estaba deseoso de conocerlas y, si ello fuera posible, añadir un suplemento a su libro sobre las funciones elípticas donde el resultado quedase explicado. Además, en una de las sesiones de la Academia durante el mes de noviembre, Legendre alabó el trabajo de Jacobi. Esta intervención fue recogida por la prensa

y llegó a Alemania, impulsando a Jacobi hacia la fama. También Schumacher escribió al matemático alemán para reclamarle las demostraciones. Así que durante ese otoño Jacobi sintió la presión de redactar sus pruebas con una gran intensidad, que le llevó a esforzarse al máximo. Si lo lograba, se estaría labrando una posición permanente en la universidad, pero si fallaba quedaría expuesto a las críticas feroces de todos aquellos a los que antes él había menospreciado. Fue la lectura de la memoria de Abel, que contenía bien desarrollada la idea de invertir las integrales elípticas, además de su propio genio y su enorme tesón, lo que condujo a Jacobi a finalizar sus demostraciones y remitírselas a Schumacher, quien las publicó en diciembre de 1828 bajo el título «Sobre las transformaciones racionales de las trascendentes elípticas». Aun así, era un artículo breve, de ocho páginas, en nada comparable a la memoria de Abel. En compensación, una vez reconocida la importancia de su contribución, se le concedió—cuando aún tenía veintitrés años— una posición permanente en la Universidad de Königsberg.

Abel no recibió las contribuciones de Jacobi de inmediato, pues ya se encontraba en su aislada Noruega. Las primeras notas, sin pruebas, llegaron a Oslo entre octubre y noviembre de 1827, pero su lectura no impresionó a Abel. Lo único que hizo fue añadir, en la segunda parte de sus *Investigaciones*, una observación en la que refería cómo las fórmulas de transformación de Jacobi se deducían directamente de su trabajo. El tercer artículo de Jacobi, con sus demostraciones completas, llegó a Oslo en abril de 1828 y esta vez Abel tomó conciencia del problema: alguien en Alemania le estaba pisando los talones, y se trataba de una persona muy inteligente que, además, utilizaba las técnicas que él (y solo él) había creado, sin citarle. Para colmo, en enero de 1828 Jacobi publicó una nota muy breve, de una sola página, titulada: «Suplemento a la memoria de Abel», en la que simplificaba uno de los cálculos del noruego.

Abel había enviado ya a Crelle la segunda parte de su memoria (en febrero de 1828), y ahora que sabía que Jacobi estaba trabajando de manera muy activa en los mismos temas, decidió mandar a Schumacher un artículo que, esperaba, mortificaría a su rival. El trabajo, titulado «Solución de un problema general relacionado

con la transformación de las funciones elípticas», seguido rápidamente por otro de título «Suplemento a la memoria anterior», exponía de forma elegante una teoría general que resolvía las cuestiones planteadas por Jacobi en sus trabajos anteriores. Sin duda, Abel quería ganar a Jacobi en su propio terreno, noquearlo, como él mismo decía en privado, y hacerlo además en el mismo escenario que Jacobi había elegido para la pugna en la que ambos estaban inmersos: la revista de Schumacher. Por otra parte, enviar a dicha revista las contribuciones era garantía de una publicación rápida.

Si Abel pretendía humillar a Jacobi y, por así decirlo, apartarle de su camino, fracasó. Jacobi no solo no se achantó ni se sintió derrotado sino que, por el contrario, expresó entusiasmo y admiración por las contribuciones de Abel. Y, además, demostró tener la capacidad de renovarse y reinventarse. Lo mejor de su obra sobre las funciones elípticas estaba aún por llegar.

Resulta curioso observar las reacciones de Gauss, Legendre y Schumacher a las contribuciones de Abel y Jacobi sobre las funciones elípticas. Legendre reconocía el enorme talento de Abel, pero apoyaba a Jacobi porque comprendía mucho mejor sus resultados, probablemente por una cuestión de lenguaje y notación —Jacobi se mantuvo más cerca de la terminología establecida durante décadas por Legendre—, mientras que las ideas de Abel le resultaban extrañas y difíciles de entender. Incluso hubo algún momento en el que Jacobi, con la intención de explicar a Legendre sus propios avances, se vio obligado a mostrarle lo que ya había hecho Abel traducido a la terminología que ambos compartían, cosa que Legendre agradeció de forma explícita. Por su parte, Abel tampoco pareció mostrar por Legendre la afección y el respeto —por no decir, devoción— que le demostraba Jacobi. En una carta llegaría a decir que Legendre era extremadamente atento, «pero más viejo que las piedras». Lo curioso es que a todos los matemáticos que se especializaron con posterioridad en el tema, la obra de Abel les parecía mucho más clara, elegante y mejor expresada que la de Jacobi, cosa que no se produjo en el momento en el que dichos trabajos se publicaron, época en la que solo Gauss y Crelle tenían un claro concepto de la superioridad de Abel. Incluso el matemático alemán Leo Königsberger (1837-1921), quien escribió

en 1904 una biografía de Jacobi, llegaría a afirmar: «Es un hecho peculiar que los trabajos de Abel, que estaban claramente concebidos, bien escritos y ordenados con lucidez, resultaran menos accesibles que los de Jacobi para el mundo matemático». Hay que decir, de todas formas, que a finales de la década de 1820 Legendre ya era consciente del valor de las contribuciones de Abel, y se lo hizo saber, expresándole su admiración no solo por carta sino también de forma pública, en la Academia de Ciencias (como había hecho antes con Jacobi). Por su parte, Schumacher expresó reiteradas veces a Gauss su deseo de que hiciera públicas sus contribuciones, pues estaba convencido de la superioridad de las mismas, aun sin haberlas visto. En una carta a Gauss, le comentaba que sabía, por boca de Hansteen, que Abel había empalidecido tras leer el tercer trabajo de Jacobi, y había necesitado beber un licor amargo para reponerse. Y, a continuación, pedía a Gauss que publicara sus ideas, a lo que añadía, en tono sarcástico: «Abel necesitará más licor cuando lea tus trabajos». Probablemente este comentario de Schumacher se basaba en la afirmación previa de Gauss de que Abel había desarrollado solo un tercio de lo que él ya había logrado en 1798. Sin embargo, aquí es Gauss quien subestimaba a Abel (o se sobrevaloraba a sí mismo).

Hay que decir que Jacobi tuvo una actitud ambivalente con la obra de Abel. Si bien es cierto que en sus comunicaciones privadas —fundamentalmente a través de cartas— lo alababa, por otra parte, sobre todo en sus primeras contribuciones al tema, se mostraba muy reticente a citarle en sus artículos. También es indiscutible que fue él quien, tras conocer la existencia de la «Memoria de París» de Abel, escribió a Legendre pidiéndole explicaciones de por qué dicho manuscrito no había tenido ya una respuesta. Y, de hecho, fueron sus palabras las que movieron de nuevo la maquinaria de la Academia de Ciencias para tomar una decisión sobre ella. Además, cuando Crelle, que era consciente de la grave situación de precariedad económica en la que se encontraba Abel, decidió desarrollar una campaña en su favor con la idea de encontrar una posición para él en Berlín, Jacobi no dudó en contribuir con su opinión favorable, redactando para Crelle una carta de recomendación en la que afirmaba:

> Abel, de manera muy diferente a como lo he hecho yo, ha llegado a mi teoría de la transformación, en la cual yo le anticipé, del mismo modo en que él se ha anticipado a mí en muchos otros temas. En tu revista apareció un artículo de Abel donde se demuestra que nuestra teoría de la transformación es exhaustiva y conclusiva. Considero su demostración una de las obras maestras más hermosas del análisis.

Crelle intentó conseguir dinero del gobierno para su revista con la idea de pagar un salario a Abel. Asimismo, buscó con todas sus energías que se le ofreciera un puesto de profesor y, para asegurarse, le preguntó si aprobaría un nombramiento. Por su parte, Abel aceptaba y, de hecho, urgía a Crelle a realizar las gestiones. Además, al mismo tiempo, presionó en Oslo para conseguir un puesto allí (pues, de otro modo, «acabaría marchándose a Berlín», donde se le esperaba). En su país, sin embargo, la amenaza no surtió efecto.

En lo científico, Jacobi se dedicó en cuerpo y alma, por espacio de más de año y medio, tiempo en el que apenas dormía, a redactar una memoria sobre las funciones elípticas en la que quedara claro cuál había sido su contribución a este tema. Dicha memoria apareció en 1829 bajo el título «Nuevos fundamentos para una teoría de funciones elípticas». Abel, cuando tuvo noticias sobre las intenciones de Jacobi de publicar este ensayo, decidió redactar también él un nuevo trabajo, que llevaría el título de «Resumen de una teoría de funciones elípticas», que del mismo modo apareció publicado en 1829 aunque, por desdicha, de forma póstuma.

Precisamente por la «Memoria de París», que ya había sido aceptada para publicación, así como por la memoria de Jacobi de 1829, la Academia de Ciencias de París decidió otorgar a ambos (a Abel, de manera póstuma) el Grand Prix de 1830.

El destino de la «Memoria de París» fue, de hecho, más truculento, porque en 1832, cuando buscaron el manuscrito a petición de Holmboe —quien preparaba la primera edición de las obras completas de Abel—, descubrieron que la memoria había desaparecido de los archivos de la Academia. Así, estas se presentaron en 1839 sin incluir la «Memoria de París». En la Academia volvieron a buscar el ensayo, que finalmente fue localizado y publicado

en 1841. Posteriormente, el noruego Marius Sophus Lie (1842-1899), que preparó junto con el también noruego Peter Ludwig Mejdell Sylow (1832-1918) la segunda edición de las obras completas de Abel, obtuvo permiso para leer el original, pero de nuevo había desaparecido (esto sucedió en 1874), así que la versión incluida en las obras completas coincide con la que publicó la Academia en 1841. En 1942, el danés Poul Heegaard (1871-1948) halló una copia del manuscrito de Abel en Roma y, en 1952, justo diez años después, el noruego Viggo Brun (1885-1978) localizó la mayor parte del manuscrito original en Florencia. Fue necesario esperar hasta el año 2000 para que Andrea del Centina encontrara las ocho páginas que faltaban, recuperando así el ensayo original al completo ciento cincuenta años después de su redacción.

Jacobi, desde luego, sobrevivió a Abel por mucho tiempo y pudo, de este modo, avanzar a placer, libre de competencias, en el desarrollo de la teoría. De hecho, aún hoy numerosos matemáticos asocian las funciones elípticas a Jacobi antes que a Abel. Uno de los resultados de Jacobi que merece la pena comentar, y que fue demostrado en 1835, varios años después del fallecimiento de Abel, es el siguiente: si se considera el conjunto p_f de los períodos una función meromorfa f definida sobre el plano complejo, entonces p_f forma un subgrupo de $\mathbb{C}$ topológicamente cerrado y, en consecuencia, si la función admite tres períodos independientes (es decir, tres períodos $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{C}$ tales que las combinaciones $n_1h_1+n_2h_2+n_3h_3$ con n_1, n_2, n_3, números enteros cualesquiera, sirven para aproximar tanto como se quiera a cualquier número complejo), entonces f es una constante. Este resultado fue extendido por el francés Maurice Fréchet (1878-1973) en 1909 al considerar un concepto de período más general, dando lugar a la primera caracterización que se conoce de los polinomios como soluciones de una ecuación funcional que no requiere utilizar derivadas. De hecho, esta generalización es el origen de lo que hoy se conoce como la teoría de polinomios en espacios de Banach.

Otra de las razones por las que se recuerda el trabajo de Jacobi en funciones elípticas es que supo aplicarlo a numerosas cuestiones de teoría de números, logrando algunos resultados espectaculares. Por ejemplo, a él se debe una demostración muy

elegante de que todo número natural positivo es suma de cuatro cuadrados perfectos. Incluso, encontró una fórmula para determinar el número de formas en las que esto se puede conseguir.

UNA VIDA QUE SE EXTINGUE

Por desgracia, a Crelle no le dio tiempo de encontrar una solución económica para Abel. En la Navidad de 1828 intensificó su campaña de apoyo, para la cual encontró además en el alemán Alexander von Humboldt (1769-1859) un excelente aliado (este eminente científico traía varias cartas de recomendación para Abel, firmadas entre otros por Gauss y Legendre). El 28 de diciembre escribió a las autoridades prusianas suplicándoles celeridad en su decisión, pues otras instituciones como la Universidad de Copenhague empezaban ya a mostrar interés por reclutar a Abel. A esto, añadía las siguientes palabras:

> Los caballeros Dirichlet, Abel, Jacobi y Steiner, quienes todos a excepción de Abel están al servicio del gobierno de Prusia, representan ciertamente un grupo de jóvenes matemáticos que garantizan las más altas expectativas para el avance de la ciencia. Quizás ellos, con el tiempo, serán matemáticos del más elevado rango, pues a pesar de su juventud, la ciencia ya les debe importantes progresos. Una vez el gobierno de Prusia atrajo a los matemáticos de mayor mérito —Euler, Lagrange, Lambert, etc.— y les ofreció lo que no podían encontrar en otros países: una posición honorable que les permitiera elevarse por encima de su período y por encima de la ciencia contemporánea. De nuevo las autoridades de Prusia se encuentran en la posición de apoyar talentos tan inmensos que la naturaleza los produce solo raramente...

Esas mismas Navidades Abel había viajado desde Oslo, ciudad en la que se encontraba solo, hasta Froland, donde además de estar cerca de varios de sus amigos, podía pasar las fiestas con su novia. Antes de partir ya se encontraba enfermo y el médico le había prevenido de emprender el viaje, que duraba varios días y era imposible de realizar en condiciones adecuadas para un enfermo. Sin embargo, Abel ignoró el consejo e intentó ocultar su estado de salud a los demás. Encima, al llegar a su destino, no dejó de trabajar en sus artículos y acabó agotándose y empeorando su situación inicial. A pesar de esto, el 6 de enero de 1829 Abel envió un último trabajo a Crelle. Ya se había convencido de que la Academia de Ciencias de París no publicaría su memoria y, además, había adquirido conciencia de la importancia de presentar pronto sus resultados si no deseaba que otros, como Jacobi, se anticiparan. Así, decidió publicar una breve nota con el enunciado del teorema principal de la «Memoria de París», su famoso teorema de adición. El artículo, de tan solo dos páginas, prometía que en futuros estudios aparecerían diversas aplicaciones, pero Abel no podía saber entonces que este sería el último trabajo que escribiría. Cuando, para el 9 de enero, Abel tenía previsto volver, su salud mostró síntomas inequívocos de empeorar y ya no pudo ocultar que llevaba tiempo escupiendo sangre. No se le dejó partir; por el contrario, se le forzó a mantener absoluto reposo durante semanas —que luego se convirtieron en meses—. Pero Abel no se recuperó y, finalmente, el 6 de abril de 1829, falleció de tuberculosis. Su entierro tuvo lugar en Froland, a los pocos días. El 8 de abril, solo dos días después de su fallecimiento, Crelle le escribía desde Alemania una carta comunicándole la decisión del gobierno de concederle una plaza de profesor permanente en Berlín. Demasiado tarde. En su carta le decía: «Ya no tendrás que preocuparte nunca más por el futuro».

CAPÍTULO 4

El legado de Abel

Si el tamaño de una estatua es una medida de su importancia, entonces el imponente monumento a Abel en Oslo —una escultura de bronce de cuatro metros sobre una columna de granito de ocho— da una idea del enorme respeto que se profesa a dicho matemático en su país natal. En 2002, coincidiendo con el bicentenario de su nacimiento, el gobierno noruego instauró el premio Abel con la intención de convertirlo en el Nobel de las matemáticas.

Tras la prematura y trágica muerte de Abel en 1829, un cierto sentimiento de culpa se extendió entre la sociedad noruega por no haber proporcionado a tan ilustre genio un puesto académico que le aportase seguridad económica. Los elogios póstumos al matemático noruego y a su obra se sucedieron rápidamente. Crelle escribió en su revista:

> Todos los trabajos de Abel llevan la impronta de un ingenio y una fuerza de pensamiento que es inusual y por veces asombrosa, incluso si la juventud del autor no se tuviese en cuenta [...]. Pero no fue solo por su gran talento que se granjeó el respeto e hizo su pérdida infinitamente lamentable. Se distinguió de igual forma por la pureza y nobleza de su carácter, y por una rara modestia que hizo su persona apreciada al mismo inusual grado que lo fue su genio.

Por su parte, Jacobi, su gran rival en la creación de la teoría de las funciones elípticas, escribió en una carta a Legendre:

> Unos pocos días después de mi última carta recibí la triste noticia de la muerte de Abel [...]. Los problemas que se planteó —encontrar una condición necesaria y suficiente para que una ecuación algebraica sea resoluble por radicales y para que una integral arbi-

traria sea expresable en forma finita, su maravilloso descubrimiento de una propiedad general compartida por todas las funciones que son integrales de funciones algebraicas, etc.— son cuestiones de una naturaleza que era peculiar suya; nadie antes que él se había atrevido a plantearlas. Él se ha ido, pero ha dejado una gran inspiración.

Su gran amigo y mentor Holmboe escribió en su obituario:

Su vida y actividad científica fueron breves; sin embargo, alcanzó grandes hitos para la ciencia. Todos sus artículos llevan la impronta del más penetrante ingenio, y demuestran sin lugar a dudas que fue una de las mentes matemáticas más eminentes jamás creada. Aquellos que no se pueden formar un juicio propio leyendo y entendiendo sus trabajos se convencerán de la veracidad de esta afirmación por la aclamación que los más famosos matemáticos le han otorgado.

«Abel ha dejado suficiente a los matemáticos para mantenerlos ocupados durante quinientos años.»

— Charles Hermite.

ABEL, TESORO NACIONAL

El trabajo de Abel se encontraba diseminado en diferentes revistas, no siempre de fácil acceso, por lo que se estimó conveniente editar sus obras completas. El gobierno noruego corrió con los gastos, y la labor de edición recayó en Holmboe, de manera que fueron publicadas en 1839, tan solo diez años después de la muerte de Abel. Holmboe fue un gran amigo del difunto matemático, pero tal vez no era el más apropiado para ocuparse de su obra, pues incluyó en su edición alguno de los primeros trabajos de Abel que contenía errores. Además, la importante memoria de Abel sobre funciones elípticas que había presentado a la Academia de

Ciencias de París, y por la que se le concedió póstumamente el *Grand Prix* de 1930 junto a Jacobi, permanecía perdida, de manera que no pudo ser incluida. La memoria apareció más adelante y sería publicada por vez primera en la revista de la Academia de Ciencias de París en 1841.

Para conmemorar el centenario del nacimiento de Abel, en 1902 decidió erigirse un monumento en su honor. La estatua fue completada seis años después por Gustav Vigeland (1869-1943), considerado el mejor escultor noruego de la época. La imponente estatua, que se encuentra en el parque del Palacio Real en Oslo,

UNA SEGUNDA EDICIÓN PARA LAS *OBRAS COMPLETAS* DE ABEL

Dos matemáticos noruegos de talla internacional, Ludwig Sylow y Sophus Lie, se ocuparon de la reedición de las obras completas de Abel, pues se hizo patente la necesidad de revisar las anteriores para corregir ciertos errores y añadir la memoria sobre las funciones elípticas. La nueva edición fue publicada en 1881 y ocupaba más de 950 páginas en dos volúmenes, una extensión impresionante si se tiene en cuenta que Abel murió antes de cumplir veintisiete años.
Con respecto a la «Memoria de París», los editores intentaron conseguir el original, pero otra vez había desaparecido:

Sophus Lie

> Nos ha parecido muy deseable poder comparar la memoria impresa con la original y Sophus Lie obtuvo en 1874 el permiso de la Academia de Ciencias de París para consultar el manuscrito de Abel; pero fue constatado en los archivos de la Academia que el manuscrito ya no se encontraba allí después de la impresión de la memoria.

De hecho, la memoria original de Abel no fue completamente recuperada hasta 2000, cuando el matemático italiano Andrea del Centina halló las ocho páginas que faltaban del manuscrito que había encontrado con anterioridad Viggo Brun en la biblioteca Moreniana de Florencia en 1952.

representa a Abel como una figura romántica, con el pelo ondeando al viento, y que se mantiene de pie sobre dos figuras tumbadas que simbolizan los genios del espíritu y del pensamiento. Abel, junto con Galois, es el prototipo de genio matemático romántico, y esta visión idealizada es la que realza la escultura de Vigeland, aunque no todos estuvieran de acuerdo. En particular, el influyente matemático alemán Felix Klein criticó la obra de Vigeland, en comparación con la estatua de Mozart en Viena, en estos términos:

> En su lugar, debo mencionar el monumento de una clase muy diferente que fue erigido a Abel en Cristianía y el cual debe decepcionar grandemente a cualquiera familiar con su naturaleza. Sobre un imponente y escarpado bloque de granito, un juvenil atleta tipo Byron pasa por encima de dos grises víctimas sacrificiales, apuntando en dirección al cielo. Si fuera necesario, uno podría tomar al héroe como un símbolo del espíritu humano, pero uno reflexiona en vano sobre el significado más profundo de los dos monstruos. ¿Son las derrotadas ecuaciones quínticas y funciones elípticas? ¿O las penas y preocupaciones de su vida cotidiana? El pedestal del monumento lleva, en letras inmensas, la inscripción «Abel».

ALGUNOS MATEMÁTICOS NÓRDICOS DESTACADOS

El matemático noruego Viggo Brun escribió, en el prefacio de su libro sobre las matemáticas en Noruega antes de Abel, estas palabras: «[...] en la mayoría de los casos se trataba más de una suerte de cálculo que de matemáticas. No más de cuatro de los académicos que menciono podrían reclamar el título de matemático». La situación cambió después de Abel, y los países nórdicos continuaron produciendo matemáticos de primera fila, siendo los siguientes algunos de los más destacados.

Ludwig Sylow (1832-1918). Fue el mayor de diez hermanos y recibió una esmerada educación en la que la modestia se consideraba una virtud esencial. Sus palabras referidas a Abel en el centenario de su nacimiento —«[...] tan gran modestia quizá no encaja en este mundo, también puede ser vista como una debilidad»— podrían ser aplicadas al propio Sylow. La mayor parte de su vida ocupó cargos inferiores a su categoría como matemático, y hasta los sesenta y cinco años no obtuvo un puesto permanente en la universidad. Sus resultados más conocidos son los llamados teoremas de Sylow en teoría de grupos. Cauchy había probado un recíproco parcial del teorema de Lagrange, en concreto, si G es un grupo finito cuyo orden es divisible por un número primo p, entonces G tiene un elemento de orden p. Sylow generalizó este resultado demostrando que si p^n es la mayor potencia del primo p que divide al orden del grupo G, entonces G tiene subgrupos de orden p^n. Entre 1871 y 1881, Sylow y Sophus Lie realizaron una nueva edición de las obras completas de Abel en la que incluyeron material que no había sido utilizado por Holmboe en la edición de 1839.

Sophus Lie (1842-1899). Posiblemente sea el matemático noruego de mayor renombre después de Abel. Lie estudió en la Universidad de Cristianía, donde recibió clases de Sylow sobre la teoría de ecuaciones algebraicas desarrollada por Abel y Galois. Se graduó sin demostrar especial interés ni talento por las matemáticas, hasta que en 1867 fue deslumbrado por una idea y decidió convertirse en matemático. Al igual que Abel, consiguió una ayuda estatal para visitar los principales centros matemáticos internacionales: Berlín, donde congenió con Ernst Kummer (1810-1893) y Felix Klein, y París, ciudad en la que conoció a Gaston Darboux (1842-1917), Michel Chasles (1793-1880) y Camille Jordan (1838-1922). Lie estaba en París cuando estalló la guerra franco-prusiana de 1870. En su huida de Francia a través de Italia fue detenido acusado de ser un espía alemán —para los franceses, sus notas matemáticas eran la prueba irrefutable de que transmitía mensajes secretos codificados— y solo la intervención de Darboux lo libró de la cárcel. El mayor interés de Lie fueron las ecuaciones diferenciales, para las que aspiraba crear una teoría similar a la que Galois había construido para las ecuaciones algebraicas. Estudió en profundidad los grupos de transformaciones continuas, dando origen a los llamados «grupos de Lie». Editó, junto

con Sylow, las *Obras Completas* de Abel de 1881, aunque Lie siempre afirmó que la mayor parte del trabajo había sido llevado a cabo por Sylow.

Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927). Nació en Estocolmo y fue profundamente influenciado por su madre y familia materna, hasta el punto de que a los veinte años decidió añadir a su nombre el apellido de soltera de su madre: Mittag. Después de presentar su tesis doctoral, realizó una estancia de tres años en París y Berlín, donde conoció a Charles Hermite y Karl Weierstrass (1815-1897) y percibió la importancia de la colaboración internacional en matemáticas. En 1882 fundó la revista *Acta Mathematica*, que sigue siendo en la actualidad una de las revistas matemáticas más prestigiosas e influyentes del mundo. En 1916, Mittag-Leffler y su mujer legaron su casa y su magnífica biblioteca en Djursholm, en las afueras de Estocolmo, a la Academia Sueca de Ciencias, donde hoy se levanta el Instituto Mittag-Leffler, uno de los centros punteros en investigación matemática. En palabras del matemático británico Godfrey H. Hardy, «Mittag-Leffler fue un hombre notable en muchos sentidos. Fue un matemático de primera fila, cuyas contribuciones al análisis se han vuelto clásicas, y desempeñó un papel importante en la inspiración de la investigación posterior; fue un hombre de fuerte personalidad, con una intensa devoción por su objeto de estudio; y tenía la persistencia, la posición y los medios para hacer valer su entusiasmo».

EL PREMIO ABEL

En 1897 vio la luz el testamento del industrial sueco Alfred Nobel (1833-1896), en el que se establecían los conocidos premios que llevan su nombre en química, literatura, paz, física y medicina. Los premios Nobel se concedieron por primera vez en 1901, y en poco tiempo se convirtieron en los de mayor prestigio en sus respectivas áreas. No sería hasta 1968 cuando se añadiría el premio Nobel de Economía, técnicamente el premio en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel, como consecuencia de una

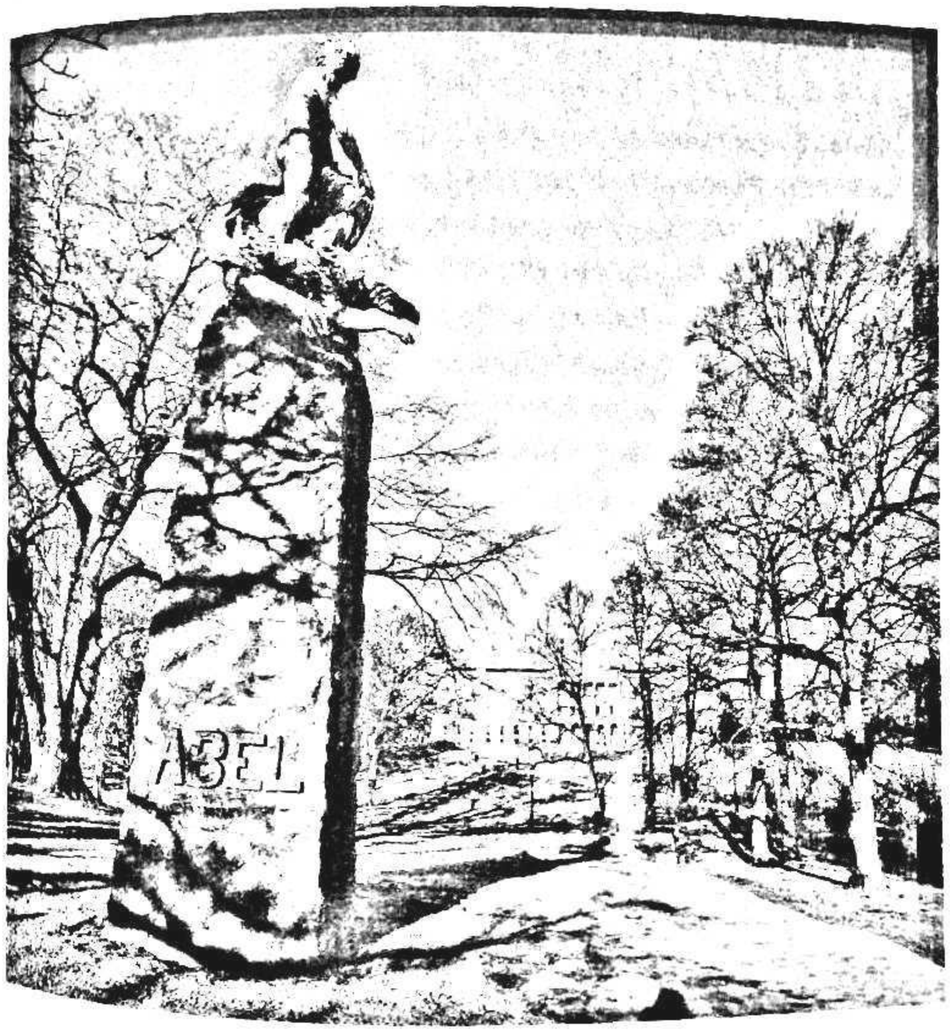


FOTO SUPERIOR: Sello noruego en honor de Niels Henrik Abel.

FOTO INFERIOR: Monumento a Abel en el parque del Palacio Real en Oslo, Noruega. Fue realizado en 1908 por el escultor Gustav Vigeland (1869-1943).

donación del Banco Nacional de Suecia a la Fundación Nobel en Matemáticas.

La ausencia de un premio Nobel en Matemáticas siempre ha sido un asunto polémico. Se ha apuntado, como posible causa, la mala relación existente entre Alfred Nobel y Mittag-Leffler, que habría llevado al primero a no querer establecer un premio que podría haber sido ganado por el segundo, aunque lo más probable es que al pragmático hombre que era Alfred Nobel las matemáticas le pareciesen demasiado teóricas y carentes de aplicación en el mundo real.

«El teorema de Abel es un monumento más duradero que el bronce.»

— Adrien-Marie Legendre, parafraseando a Horacio.

La falta de un premio Nobel en Matemáticas impulsó a Sophus Lie a intentar establecer un premio Abel en matemáticas puras. En 1898 utilizó su amplia red de contactos para recabar apoyos internacionales al premio. Su idea fue en general muy bien recibida por la comunidad matemática, y obtuvo respuestas positivas de importantes matemáticos, como los franceses Émile Picard (1856-1941) y Charles Hermite o el alemán Felix Klein, pero tras la muerte de Lie, en 1899, el proyecto fue abandonado.

La idea del premio Abel en Matemáticas volvió a surgir en 1902 en el contexto de las celebraciones del centenario del nacimiento de Abel. El gobierno y la Casa Real se involucraron a fondo en la conmemoración, a la que también fueron invitados importantes matemáticos extranjeros, y se decidió erigir el monumento a Abel que Vigeland completaría seis años después. El propio rey Oscar anunció la creación de una medalla de oro en honor del noruego para premiar los trabajos matemáticos más destacados. Se crearon varias comisiones con el fin de estudiar la viabilidad del premio y diseñar sus estatutos, pero un grave asunto político, la separación de Noruega y Suecia en 1905, impidió culminar el proyecto.

PREMIOS MATEMÁTICOS: MEDALLA FIELDS *VERSUS* PREMIO ABEL

El hecho de que Alfred Nobel no dejase instaurado un premio Nobel en Matemáticas ha perjudicado claramente el reconocimiento social de esta ciencia. A pesar de ello, varios matemáticos han ganado dicho premio en otras disciplinas, como en literatura —en 1904 el español José Echegaray (1832-1916), a quien se debe también el perfil biográfico sobre Abel, *El Newton del Norte*, y en 1950 el británico Bertrand Russell (1872-1970)— o de forma más frecuente, en economía, como los estadounidenses Kenneth Arrow (1921-2017) en 1972 y John Nash (1928-2015) en 1994. Para compensar esta carencia se han instaurado a lo largo del siglo xx distintos premios matemáticos, siendo la medalla Fields y el premio Abel los que han alcanzado mayor prestigio y repercusión.

Dos galardones distintos

La medalla Fields, creada por el matemático canadiense John Charles Fields (1863-1932), se entregó por primera vez en el Congreso Internacional de Matemáticos de Oslo de 1936. Considerada durante muchos años como el premio más prestigioso de las matemáticas, posee ciertas características que la diferencian claramente de los premios Nobel: se entrega cada cuatro años, a un mínimo de dos y un máximo de cuatro matemáticos menores de cuarenta años y su cuantía económica es de unos 10 000 euros. En contraste, el Nobel es anual, no puede ser compartido por más de tres ganadores, la edad media de los galardonados es bastante avanzada y su cuantía es de casi un millón de euros. El límite de edad en la medalla Fields se toma tan en serio que cuando el matemático británico Andrew Wiles (n. 1953) probó el último teorema de Fermat recibió solo una placa conmemorativa por tener más de cuarenta años.

El premio Abel fue presentado en 2002, coincidiendo con la celebración del bicentenario del nacimiento de matemático noruego. Se creó para premiar trabajos matemáticos de excepcional calidad, para aumentar el estatus social de las matemáticas y atraer el interés de los más jóvenes por las mismas. La Academia Noruega de las Artes y las Ciencias lo concede anualmente a uno o dos matemáticos de trayectoria excepcional, y es entregado por el rey de Noruega en una ceremonia de gran solemnidad. Su cuantía económica —6 000 000 de coronas noruegas, unos 650 000 euros— y su repercusión en los medios lo han convertido en lo más parecido hoy en día a un premio Nobel en Matemáticas.

El matemático estadounidense Michael Freedman, ganador de la medalla Fields en 1986.

La memoria de Abel siguió viva en Noruega. Por ejemplo, su rostro fue impreso en un sello con motivo del centenario de su muerte en 1929 —un privilegio que solo habían disfrutado hasta la fecha la familia real y el dramaturgo Henrik Ibsen (1828-1906)—, y en 1948 su retrato apareció en el billete de 500 coronas. También se han escrito distintas biografías sobre la vida de Abel, siendo las más completas la de Øystein Ore (1899-1968), *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary* (1957), y Arild Stubhaug (n. 1948), *Niels Henrik Abel and his Times* (2000).

En 2000, en vísperas del bicentenario del nacimiento del matemático, tomó fuerza de nuevo la idea de crear un premio Abel en Matemáticas. Esta vez la idea fructificó, y al año siguiente el gobierno noruego anunció la creación de un fondo de 200 millones de coronas (aproximadamente 22 millones de euros) administrado por el Ministerio de Educación y cuyo retorno anual sería concedido a la Academia Noruega de Ciencias y Letras para otorgar el premio Abel a una o más personalidades por sus contribuciones excepcionales a las matemáticas. La creación del premio alcanzó un amplio consenso político, tal vez porque uno de sus objetivos explícitos era elevar la consideración social de esta disciplina y atraer hacia ella el interés de niños y jóvenes.

LOS GANADORES DEL PREMIO ABEL

Por fin, más de cien años después de la primera propuesta al respecto, el premio en honor de Abel veía la luz de manera oficial en 2002, coincidiendo con el bicentenario de su nacimiento. A continuación se reseñan los ganadores hasta la fecha de dicho premio, mediante los cuales se ofrece, sin duda alguna, un panorama de las mejores matemáticas del siglo xx:

En 2002, el año de su instauración, el premio Abel se concedió de forma honorífica a Atle Selberg (1917-2007), a la sazón el matemático noruego de mayor prestigio internacional. Selberg desarrolló la mayor parte de su carrera en Princeton, Estados Unidos, y

EL TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO

Un número primo es cualquier natural distinto de 1 que solo es divisible por 1 y por sí mismo. Los números primos son los bloques básicos de los que están compuestos todos los números, algo así como los átomos de la aritmética, puesto que todo número natural se descompone de forma única —salvo el orden de los factores— como producto de números primos. El matemático griego Euclides ya probó, en los *Elementos*, que había una cantidad infinita de números primos: dados los primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, el número $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ no es divisible por ninguno de los primos anteriores porque la división entre cada uno de ellos da resto 1 y, por tanto, o bien p es primo o bien p es divisible por un primo diferente a $p_1, p_2, \ldots, p_n$. En cualquier caso, el conjunto de los números primos no puede ser finito. La distribución altamente irregular de los números primos entre los números naturales ha desconcertado desde siempre a los matemáticos. Gauss conjeturó en su diario una fórmula para la función $\pi(n)$ que representa el número de primos menores o iguales a n, en concreto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln(n)}{n} = 1.$$

La fórmula dice que asintóticamente, para valores grandes de n, la densidad de números primos

$$\frac{\pi(n)}{n}$$

se comporta como el inverso del logaritmo neperiano

$$\frac{1}{\ln(n)}.$$

Este resultado, conocido como teorema del número primo, fue probado en 1896 por los franceses Jacques Hadamard (1865-1963) y Charles Jean de la Vallée-Poussin (1866-1962), de forma independiente, a través de técnicas de variable compleja y completando el programa que Bernhard Riemann (1826-1866) había esbozado en 1851.

Una demostración elemental

La prueba analítica del teorema del número primo era muy sofisticada y dejaba la puerta abierta a la existencia de una demostración que no usase la teoría de funciones de variable compleja. Así, el noruego Atle Selberg y el húngaro Paul Erdös (1913-1996) impactaron a la comunidad matemática cuando en 1949 encontraron una comprobación de este tipo para dicho teorema. Erdös, matemático nómada, extremadamente colaborativo y prolífico, es una leyenda de las matemáticas del siglo xx. Por su parte, Selberg, mucho más reservado, desarrolló casi todo su trabajo en solitario en el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton, y fue merecedor de los mayores premios en matemáticas: la medalla Fields en 1950 y el premio Abel honorífico en 2002.

sus principales contribuciones fueron en la teoría de números: el estudio de los ceros de la función zeta de Riemann, métodos de criba, la demostración elemental del teorema del número primo y la fórmula de la traza, entre otros. Selberg obtuvo la medalla Fields en 1950, y gozaba de gran prestigio y autoridad dentro de la comunidad matemática.

En el primer año de su concesión regular, 2003, se premió al francés Jean-Pierre Serre (n. 1926), un gigante de las matemáticas del siglo XX que había sido el miembro más joven del mítico colectivo de matemáticos franceses Bourbaki. En 1954 se había convertido también en el matemático más joven hasta entonces en recibir la medalla Fields. Las contribuciones de Serre a la topología, la geometría algebraica y la teoría de números son numerosas y profundas. En particular su trabajo en teoría de números extendió las ideas introducidas por Abel en su demostración de la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado por radicales. Serre también había sido nombrado doctor *honoris causa* por la Universidad de Oslo en 2002, en conexión con el bicentenario del nacimiento de Abel.

En 2004 el premio Abel fue concedido conjuntamente al matemático británico Michael F. Atiyah (n. 1929) y al matemático estadounidense Isadore M. Singer (n. 1924) por su teorema del índice. Según este teorema, que relaciona propiedades analíticas, geométricas y topológicas, el índice de un sistema de ecuaciones diferenciales —un indicador del número de soluciones del sistema en una cierta región— depende solo de la topología, es decir, de la forma, de dicha región. Sorprendentemente, este teorema de matemática pura fue muy bien acogido por la comunidad de físicos teóricos, quienes lo usaron, por ejemplo, en el desarrollo de la teoría de cuerdas. Atiyah había sido galardonado también con la medalla Fields en 1966.

Peter D. Lax (n. 1926), reconocido experto en ecuaciones en derivadas parciales y uno de los matemáticos aplicados de mayor prestigio, recibió el premio en 2005. Húngaro de nacimiento, desarrolló prácticamente toda su carrera en el Instituto Courant de Nueva York, creado por el matemático alemán Richard Courant (1888-1972) a imagen y semejanza del Instituto de Matemáticas de Gotinga. Su nombre aparece vinculado tanto a resultados teóricos (lema de Lax-Milgram, pares de Lax) como a métodos computacionales (esquema numérico de Lax-Friedrichs, teorema de equivalencia de Lax). Tal y como alguien ha comentado humorísticamente, dado que su trabajo forma parte de la base teórica que permite extraer el petróleo del subsuelo noruego, Peter Lax ha financiado de alguna manera su propio premio Abel.

El premio Abel de 2006 fue concedido al sueco Lennart Carleson (n. 1928) por sus profundas contribuciones al análisis armónico y a la teoría de los sistemas dinámicos. Carleson es un matemático teórico famoso por haber resuelto problemas muy difíciles en diversos campos. Se podría afirmar que su resultado más espectacular es la demostración de la convergencia puntual (en casi todo punto) de la serie de Fourier de una función de cuadrado integrable. Este hecho contrasta con el ejemplo presentado en 1928 por el matemático ruso Andréi Nikoláevich Kolmogórov (1903-1987) de una función absolutamente integrable, cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto. Otro resultado impactante de Carleson fue la demostración rigurosa —que confirmaban las evidencias numéricas— de la existencia de un atractor extraño, es decir, un conjunto invariante y con dinámica caótica, en la aplicación de Hénon.

En 2007 el premio Abel volvió a ser concedido a un matemático vinculado al Instituto Courant: S. R. Srinivasa Varadhan (n. 1940), de origen indio pero asociado a la institución neoyorquina desde 1963. Las aportaciones de Varadhan, especialista en probabilidad, han sido fundamentales para la teoría de las «grandes desviaciones». Por ejemplo, según la ley de los grandes números, al lanzar una moneda muchas veces, la proporción de caras se aproximará cada vez más a ½, pero aun así hay una pequeñísima probabilidad de que todas las monedas caigan de cara. Calcular la probabilidad de estas «grandes desviaciones» es del mayor interés práctico —basta pensar en las compañías de seguros—. Así, los resultados de Varadhan han tenido aplicaciones en campos tan diversos como la teoría cuántica de campos, la física estadística, la dinámica de poblaciones y la economía, entre otros.

El premio Abel de 2008 fue compartido por el estadounidense John Griggs Thompson (n. 1932) y el francés Jacques Tits (n. 1930) por sus contribuciones fundamentales a la moderna teoría de grupos: el santuario que Lagrange, Cauchy, Abel y Galois empezaron a levantar se convirtió durante el siglo xx en una gran catedral, entre cuyos arquitectos principales figuran Thompson y Tits. Thompson se especializó en el estudio de los grupos finitos, como los grupos de permutaciones en los que Abel trabajó en relación con la imposibilidad de resolver la quíntica por radicales, mientras que Tits creó un nuevo marco teórico para el estudio de los grupos continuos, como los introducidos por Lie. Los resultados de ambos han sido fundamentales para culminar uno de los hitos de las matemáticas del siglo pasado: la clasificación de los grupos finitos simples, una especie de tabla periódica que explica la estructura de los grupos finitos. Thompson también había recibido la medalla Fields en 1970.

El matemático rusofrancés Mijaíl Leonídovich Grómov (n. 1943) recibió el premio Abel en 2009 por sus «revolucionarias contribuciones a la geometría». En particular, destacan su estudio de propiedades globales en geometría de Riemann y sus trabajos pioneros en el campo de la geometría simpléctica, cuyo origen se halla en el formalismo hamiltoniano de la mecánica clásica y que se aplica, por ejemplo, en teoría de cuerdas. Grómov también introdujo conceptos geométricos en grupos discretos que han tenido gran repercusión en el estudio de sus propiedades algebraicas. En palabras de uno de sus colaboradores: «Es increíble lo que Mijaíl Grómov puede hacer solo con la desigualdad triangular» (se refería a la desigualdad $a < b + c$ que cumplen los lados $a, b, c > 0$ de cualquier triángulo).

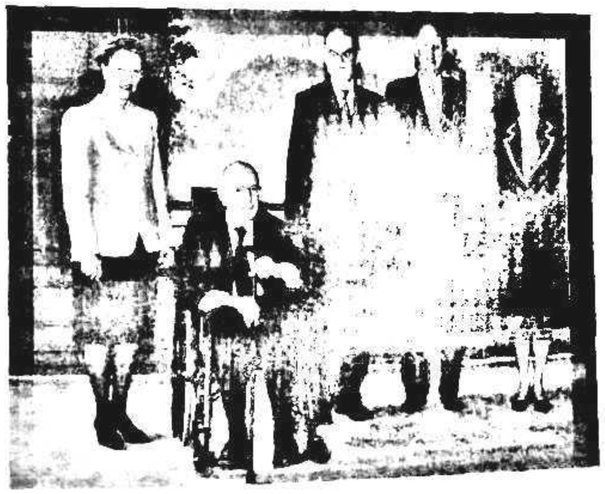
El galardonado con el premio Abel en 2010 fue el matemático estadounidense John Torrence Tate (n. 1925), por su gran impacto en la teoría de números. Tate descubrió su gusto por las matemáticas siendo muy joven a través de los puzles de Henry Dudeney (1857-1930) y del clásico libro del escocés Eric Temple Bell (1883-1960) *Los grandes matemáticos*, que tantas vocaciones matemáticas ha despertado. Su principal campo de estudio ha sido la teoría de números algebraicos, es decir, las

LA CLASIFICACIÓN DE LOS GRUPOS FINITOS SIMPLES

La teoría de grupos se inició con los estudios sobre la resolución de ecuaciones por radicales llevadas a cabo por Lagrange, Cauchy, Abel y Galois, y hoy en día es un concepto transversal con múltiples aplicaciones, desde la física de partículas hasta la cristalografía, pasando por la solución al cubo de Rubik o los mosaicos de la Alhambra. Uno de los grandes hitos del siglo xx en teoría de grupos fue la clasificación de los grupos finitos simples, que son los bloques con los que se forma cualquier otro grupo finito. La tarea fue ingente: involucró el trabajo conjunto de más de cien matemáticos y ocupó más de diez mil páginas. Un resultado clave fue probado en 1962 por Walter Feit (1930-2004) y John Griggs Thompson, premio Abel en 2008: «Cualquier grupo finito de orden impar es resoluble». A pesar de su sencillo enunciado, de tan solo ocho palabras, su demostración ocupó un volumen completo de 255 páginas de la revista *Pacific Journal of Mathematics*, y constituyó un ingrediente esencial para el teorema de clasificación, según el cual cualquier grupo finito simple es de uno de los siguientes tipos: un grupo cíclico de orden primo, un grupo alternado, un miembro de una de las dieciséis familias de grupos de Lie finitos o uno de los veintiséis grupos esporádicos.

El monstruo

El enfoque geométrico de la teoría de grupos introducido por Jacques Tits, el otro galardonado en 2008 con el premio Abel, resultó a su vez fundamental en el estudio de los grupos esporádicos, y en particular del mayor de todos, conocido de forma popular como el «Monstruo» por su enorme tamaño: contiene unos $8\,080 \cdot 10^{50}$ elementos, un número increíblemente grande que equivale al número de partículas elementales en el planeta Júpiter. Para hacerse una idea de la complejidad del «Monstruo» basta señalar que se corresponde con el grupo de simetrías de un espacio de 196 883 dimensiones.



Jacques Tits y John Griggs Thompson (segundo y tercero por la izquierda, respectivamente) posan con los monarcas noruegos y con la esposa de Tits, Marie-Jeanne (primera por la derecha), en el Palacio Real de Oslo tras recibir el premio Abel, el 20 de mayo de 2008.

raíces de polinomios con coeficientes racionales. Al igual que Abel, su influencia puede medirse por la cantidad de conceptos y resultados asociados a su nombre: módulo de Tate, algoritmo de Tate, teorema de Serre-Tate, teoría de Honda-Tate, entre otros.

En 2011 el premio Abel fue concedido al estadounidense John Willard Milnor (n. 1931), uno de los matemáticos más versátiles del siglo XX, con importantes contribuciones en topología, geometría y álgebra. Uno de sus resultados más asombrosos, y por el que recibió la medalla Fields en 1962, fue el descubrimiento de las «esferas exóticas» en dimensión siete. Así, Milnor probó que existen variedades diferenciables que pueden transformarse de forma continua en una esfera heptadimensional, pero dicha transformación nunca es suave, siempre aparecerán arrugas o pliegues que no pueden alisarse. De hecho, en dimensión siete existen veintiocho «esferas exóticas» diferentes. Milnor también realizó aportaciones importantes en teoría de nudos —escribió su primer artículo sobre el tema con diecisiete años, un ejemplo de precocidad como Abel—, teoría de grupos, K-teoría, dinámica compleja, etc.

El matemático húngaro Endre Szemerédi (n. 1940) recibió el premio Abel en 2012 por sus numerosas y profundas contribuciones a la combinatoria, entendida en un sentido amplio como el estudio de las estructuras discretas. Su resultado más importante, el teorema de Szemerédi, afirma que $S(k, n)$ —el mayor número de enteros entre 1 y n que puede elegirse sin contener ninguna progresión aritmética de longitud k— es un porcentaje de n tan pequeño como se quiera siempre que n sea suficientemente grande. El teorema de Szemerédi aúna un enunciado sencillo de entender y una prueba extremadamente complicada, aunque de naturaleza elemental, es decir, sin usar conceptos matemáticos avanzados. Los resultados de Szemerédi han tenido importantes aplicaciones en teoría de números, ciencias de la computación e inteligencia artificial.

El galardón de 2013 recayó en el belga Pierre Deligne (n. 1944). Considerado como uno de los mejores matemáticos del siglo XX, fue ganador también de la medalla Fields en 1978. El comité del

premio Abel destacó sus valiosas contribuciones a la geometría algebraica, que han tenido un gran impacto en la teoría de números y la teoría de la representación. Su resultado más relevante fue la demostración de la hipótesis de Riemann para variedades sobre un cuerpo finito, una variante de la hipótesis de Riemann original, que es en la actualidad el problema abierto más importante de las matemáticas. Como consecuencia de su teorema, Deligne pudo establecer resultados tan increíbles como una estimación precisa del error cometido al escribir un número como suma de veinticuatro cuadrados.

El ganador del premio Abel en 2014 fue Yákov G. Sinái (n. 1935), un prestigioso investigador de la escuela rusa que trabaja en la frontera entre las matemáticas y la física. Sus contribuciones más destacadas han tenido lugar en la teoría de los sistemas dinámicos, la teoría ergódica y la mecánica estadística, donde introdujo importantes conceptos como la entropía de Kolmogórov-Sinái, las medidas de Sinái-Ruelle-Bowen y los paseos de Sinái, entre otros. En un interesante artículo de 2006, Sinái se preguntaba si matemáticos y físicos eran como perros y gatos, y terminaba con estas palabras: «Sin embargo, es verdad que el mundo de los matemáticos y el de los físicos son bastante diferentes y que existe una frontera que los separa. Esta frontera es muy personal, y cada uno elige la suya».

El premio Abel de 2015 fue concedido a los matemáticos John Forbes Nash (1928-2015) y Louis Nirenberg (n. 1925), por sus contribuciones a las ecuaciones en derivadas parciales y sus aplicaciones al análisis geométrico. Nirenberg es reconocido internacionalmente como uno de los líderes en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, mientras que Nash publicó pocos artículos pero de una gran influencia. En concreto, se debe a Nash, y de forma independiente al matemático italiano Ennio de Giorgi (1928-1996), la demostración de la regularidad de las soluciones de ecuaciones de tipo elíptico. Las aplicaciones al análisis geométrico que reconocía el jurado del premio Abel son los teoremas de inmersión —probados por Nirenberg para superficies de Riemann de curvatura positiva, y por Nash para variedades de Riemann generales—, que pusieron de manifiesto que estos objetos geométricos abstrac-

JOHN F. NASH: UNA VIDA DE PELÍCULA

En 2015, por primera y hasta ahora única vez, un ganador del premio Abel había sido galardonado previamente con el premio Nobel: el matemático estadounidense John Forbes Nash había conseguido en 1994 el premio Nobel de Economía por su teoría del equilibrio para juegos no cooperativos, desarrollada en su tesis doctoral cuarenta y cinco años antes. El premio Abel de 2015 se le concedió, junto a Louis Nirenberg, por sus contribuciones a la geometría diferencial y a las ecuaciones en derivadas parciales. Nash probablemente sea el ganador más mediático de cuantos han recibido el premio Abel, pues en su vida se mezclaron la genialidad, la tragedia —en forma de una esquizofrenia que lo mantuvo apartado del mundo durante cuarenta años— y una inesperada recuperación acompañada de grandes reconocimientos, un *best seller* sobre su vida titulado *Una mente prodigiosa* y la película *Una mente maravillosa* que ganó cuatro premios Óscar en 2001. Por desgracia, Nash y su esposa, Alicia, fallecieron en un accidente de taxi cuando regresaban del aeropuerto pocos días después de haber recogido el premio Abel en Oslo.

tos podían «introducirse» en un espacio euclídeo ordinario conservando las distancias.

El premio Abel de 2016 recayó en el matemático británico Andrew J. Wiles (n. 1953), quien había acaparado las portadas mundiales en 1994 cuando anunció que había demostrado el último teorema de Fermat. Su enunciado es muy sencillo (la ecuación $x^n+y^n=z^n$ no tiene soluciones enteras positivas si $n>2$), pero su demostración eludió a los mejores matemáticos durante más de trescientos años. La prueba de Wiles usaba dos conceptos, curvas elípticas y formas modulares, que habían sido introducidos en diferentes contextos por los matemáticos de los siglos XVIII y XIX. En la década de 1950, los matemáticos japoneses Yutaka Taniyama (1927-1958) y Goro Shimura (n. 1930) establecieron una conjetura según la cual a cada curva elíptica le correspondía de forma precisa una forma modular. A mediados de la década de 1980 se llegó a la conclusión de que la conjetura de Taniyama–Shimura implicaba el último teorema de Fermat, pues a partir de un contraejemplo a dicho teorema podía construirse una curva elíptica sin forma modular asociada. Fue justo un caso particular de esta conjetura para curvas semiestables, pero aun así suficientemente poderosa para implicar el último teorema de Fermat, la que probó Wiles.

El premio Abel de 2017, el último concedido hasta la fecha, ha sido otorgado al matemático francés nacido en Túnez Yves Meyer (n. 1939), por el desarrollo de la teoría de ondículas. Fue Jean-Baptiste Joseph Fourier el primero en defender y utilizar

UNA CARTA DE ABEL SOBRE FERMAT

El premio Abel de 2016 fue concedido al matemático británico Andrew J. Wiles por su demostración del último teorema de Fermat: la ecuación $x^n+y^n=z^n$ no tiene soluciones enteras positivas si $n>2$. La prueba de Wiles se basaba en la relación existente entre formas modulares y curvas elípticas, un campo de las matemáticas que se remonta a las investigaciones de Abel sobre las funciones elípticas. Precisamente, una carta de Abel a Holmboe en el verano de 1823, donde le relataba sus primeros avances en la teoría de las funciones elípticas mientras estaba visitando a Degen en Copenhague, contenía una referencia al último teorema de Fermat: aunque Abel reconocía que no había sido capaz de resolverlo, enviaba a Holmboe cuatro teoremas relacionados con él que había obtenido. Por ejemplo, Abel probó que si x y $n>2$ eran primos, entonces la ecuación de Fermat no tenía solución. Curiosamente, Abel comentaba a Holmboe que «los matemáticos británicos no son tan malos como yo pensaba», lo que resulta premonitorio si se tiene en cuenta que el misterio del último teorema de Fermat fue desvelado precisamente por un matemático de dicha nacionalidad. La epístola terminaba con una broma matemática: Abel proporcionaba como fecha de su carta la parte decimal de $\sqrt[3]{6\,064\,321219}$, lo que se correspondía con el 4 de agosto.

El teorema de Fermat en un sello francés.

de manera sistemática que una función periódica podía descomponerse como una suma, posiblemente infinita, de senos y cosenos. Desde Fourier se han encontrado muchas otras bases ortonormales, es decir, conjuntos de funciones perpendiculares dos a dos que comparten esta importante propiedad de senos y cosenos. En la teoría de ondículas hay una «ondícula madre» que genera, por traslaciones y dilataciones, todos los demás elementos de la base ortonormal. Las ondículas permiten descomponer cualquier señal (datos, imágenes, sonidos, etc.) en elementos más simples, fáciles de almacenar y que permiten recuperar con gran eficiencia y fiabilidad la señal original (por ejemplo, las ondículas son usadas en el formato de compresión gráfica JPEG 2000). Meyer inició su carrera en la teoría de números y comenzó a estudiar las ondículas gracias a una afortunada coincidencia en la fotocopiadora de su facultad, donde vio el trabajo de dos colegas suyos y supo relacionarlo con una teoría que conocía en profundidad.

La concesión del premio Abel de 2017 no ha estado exenta de una cierta polémica porque muchos consideraban que debía haber sido compartido con la matemática belga Ingrid Daubechies (n. 1954), otra figura muy destacada en el desarrollo de la teoría de ondículas. Hubiera sido, además, la primera mujer en recibir dicho premio, reivindicando de esta forma el trabajo femenino en un campo dominado en gran mayoría por los hombres. Aunque Daubechies merecía sin duda ser reconocida igual que Meyer, parece que en este caso no se trató de una discriminación, sino de un conflicto de intereses: Ingrid Daubechies fue presidenta de la Unión Matemática Internacional (UMI) de 2011 a 2014, y la UMI nomina a la mayoría de los miembros de la comisión que selecciona a los ganadores del premio Abel. La Academia Noruega de Ciencias y Letras se toma muy en serio el problema de las incompatibilidades, y en 2017 Daubechies aun no podía ser elegida para el premio Abel. En 2014, la matemática iraní Maryam Mirzajani (1977-2017) fue la primera mujer premiada con la medalla Fields; sin embargo, habrá que esperar a futuras ediciones para ver a la primera mujer ganadora del premio Abel.

A pesar de las enormes dificultades a las que tuvo que enfrentarse Niels Henrik Abel en su corta vida, incluida la pobreza y la enfermedad, sus logros fueron enormes y sus principales resultados —la irresolubilidad de la quíntica, el teorema del binomio y el teorema de adición para integrales abelianas, entre otros— todavía nos deslumbran. Su genialidad y modestia son un ejemplo valiosísimo y la mejor forma de rendirle homenaje y preservar su memoria ha sido unir su nombre al galardón que premia los mayores avances de la matemática actual.

Lecturas recomendadas

Bell, E. T., *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2010.

Echegaray, J., «El Newton del Norte», *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, volumen 5, número 1, pp. 162-173, 2002.

Grattan-Guinness, I. (editor), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*, Madrid, Alianza Editorial, 1984.

Hayek, N., «Una biografía de Abel», *Números*, volumen 52, pp. 3-26, San Cristóbal de la Laguna, Academia Canaria de Ciencias, 2002.

Kline, M., *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Editorial, 2012.

Lakatos, I., *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Madrid, Alianza Editorial, 1986.

Livio, M., *La ecuación jamás resuelta: cómo dos genios matemáticos descubrieron el lenguaje de la simetría*, Barcelona, Ariel, 2013.

Ore, O., *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary*, Nueva York, American Mathematical Society, 1957.

Pesic, P., *Abel's Proof: An essay on the sources and meaning of mathematical unsolvability*, Cambridge (Massachusetts), MIT Press, 2003.

Sánchez-Fernández, C., Noriega-Sánchez, T., *Abel. El romántico nórdico*, Madrid, Nivola, 2005.

Índice

Academia de Ciencias de París 10, 13, 110, 112, 113, 121, 122, 131
análisis matemático 11, 34, 43
Atiyah, Michael 140

Bolzano, Bernard 40, 44
Bombelli, Rafael 66
Brun, Viggo 123, 131, 132

Cardano, Gerolamo 62-66, 70, 75
Carleson, Lennart 141
Cauchy, Augustin-Louis 10, 11, 13, 18, 28, 31, 37, 38, 42-45, 47, 48, 51-54, 71 , 72, 74, 80, 112, 113, 133, 142, 143
clasificación de los grupos finitos simples 142, 143
convergencia 11, 32, 38, 39, 44, 46, 51, 109, 141
Crelle 29, 30, 31
Crelle, August Leopold 9-11, 13, 29-31, 39, 41, 55, 78, 82, 84, 115, 119, 120-122, 124, 125, 129
curva algebraica 111, 112, 114

Daubechies, Ingrid 148
Degen, Carl Ferdinand 9, 13, 22, 30, 77, 104, 147
Deligne, Pierre 144, 145
desarrollo de Taylor 42
Descartes, René 68, 70, 75
Disquisitiones Arithmeticae 108

ecuación
  algebraica 61, 68, 95, 112, 129
  de Abel 11, 19, 20
  diferencial 50
  en derivadas parciales 33, 140, 145, 146
  funcional 11, 36, 49-52, 123
ecuaciones abelianas 13
Erdös, Paul 139
Euler, Leonhard 8, 11, 18, 19, 25, 32-37, 39, 42, 44, 71, 77, 89, 98, 99, 104, 109, 110, 124

Ferrari, Lodovico 64, 65
Ferro, Scipione del 59, 62, 64, 65
Fourier, Jean-Baptiste Joseph 10, 13, 83, 112, 113, 147, 148
función
  elíptica 106

hiperelíptica 11
holomorfa 107
meromorfa 107, 123
racional 73, 79, 80, 82, 96, 97, 100, 110
simétrica 70
zeta de Riemann 36, 39, 140
funciones
de variable compleja 36, 107, 139
trigonométricas 10, 70, 86, 92, 94, 95
trigonométricas inversas 93-95

Galois, Évariste 55, 72, 83, 84, 86, 98, 132, 133, 142, 143
Gauss, Carl Friedrich 18, 19, 38, 39, 65, 67, 68, 70, 78, 108, 109, 116-118, 120, 121, 124, 139
género de una curva 111, 112, 114
Gergonne, Joseph 110
Griggs Thompson, John 142, 143
Grómov, Mijaíl 142
grupo 52, 72, 133, 143
abeliano 11

Hansteen, Christopher 19-22, 41, 77, 121
Hardy, Godfrey H. 78, 134
Hilbert, David 26, 34, 51, 52
Holmboe, Bernt Michael 8-10, 13, 18, 21, 22, 29, 37, 38, 74, 77, 82, 104, 109, 115, 122, 130, 133, 147

integral 96, 97, 104, 106, 111
integrales abelianas 10, 11, 111, 149

Jacobi, Carl Gustav Jacob 10, 11, 13, 83, 91, 115-125, 129, 131

Kemp, Christine 9, 13, 77
Klein, Felix 86, 132, 133, 136
Kronecker, Leopold 84, 85

Lagrange, Joseph-Louis 8, 18, 71-74, 77, 124, 142, 143
Laplace, Pierre-Simon 18, 33, 35
Lax, Peter D. 140, 141
Lebesgue, Henri Léon 53
Legendre, Adrien-Marie 10, 19, 81, 89, 99-102, 104, 105, 112, 113, 116, 118, 120, 121, 124, 129, 136
lemniscata 19, 98, 99, 108-111
Lie, Sophus 123, 131, 133, 134, 136, 142
Liouville, Joseph 83, 107

Mandelbrot, Benoît 85
mecánica racional 19
medalla Fields 40, 137, 139, 140, 142, 144, 148
Memoria de París 10, 13, 110, 113, 122, 125, 131
Meyer, Yves 147, 148
Milnor, John Willard 144
Mittag-Leffler, Magnus Gösta 134, 136

Nash, John 137, 145, 146
Newton, Isaac 11, 32, 42, 70, 87, 93
Nirenberg, Louis 145, 146
Nobel, Alfred 134, 136, 137
número complejo 24, 25, 31, 67, 69

Pacioli, Luca 59
péndulo 20, 101, 103
período del péndulo 10, 104
períodos de una función 45, 106, 107, 123
permutación 73, 81
Poisson, Simeón-Denis 18
polos de una función 106
premio
Abel 7, 9, 11, 129, 134, 136-148
Nobel 7, 134, 136, 137, 146

problema
de la quíntica 70, 71, 74, 77-81, 86, 97, 142, 149
mecánico de Abel 20

quinto problema de Hilbert 51, 52

Rasmussen, Søren 18, 19, 22, 77
rectificación de curvas 26, 92, 93, 96, 97
Ruffini, Paolo 73, 74, 77, 78, 80

Schumacher, Heinrich Christian 20, 116, 119-121
Selberg, Atle 138-140
serie
convergente 35, 45, 46, 47, 50
divergente 35, 38, 50, 141
funcional 45
Serre, Jean-Pierre 140
Sináí, Yákov G. 145
Singer, Isadore M. 140
solución por radicales 79-81, 84
Srinivasa Varadhan, S.R. 141
sumación de series divergentes 38
Sylow, Ludwig 123, 131-134
Szemerédi, Endre 144

Tate, John Torrence 142
tautócrona 19, 21
Tartaglia, Niccolò 59, 62-65, 75
teorema
de Abel 86, 110, 111, 136
de Euler 94
de Taylor 41-44
del binomio 11, 41, 42, 44-46, 48, 50, 52, 97, 109, 149
del número primo 139, 140
del valor medio 41-43
fundamental del álgebra 68-70, 85, 100, 107
teoremas de adición 10, 89, 98, 105, 106, 110, 125, 149
teoría de las funciones elípticas 10, 89, 129, 147
Tits, Jacques 142, 143
transformada de Abel 11

último teorema de Fermat 146, 147

Vigeland, Gustav 131, 132, 135, 136
Wiles, Andrew 137, 146, 147